Ottica

- 1 -

I famosi specchi ustori usati da Archimede per bruciare le navi nemiche erano specchi sferici. Sapendo che la distanza delle alture, dove erano posti gli specchi, dal mare era di 100 m, dite quale doveva essere il raggio di curvatura degli specchi.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

L'equazione dei punti coniugati è:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

dove è:

- p = distanza tra oggetto e specchio
- q = distanza tra specchio e immagine
- R = raggio dello specchio

Essendo il Sole lontanissimo, i raggi che provengono da esso si possono considerare provenienti dall'infinito, quindi, in questo caso, $p = \infty$. Per bruciare le navi, era necessario che i raggi riflessi convergessero su di esse, cioè a 100 m dagli specchi: quindi q = 100 m. Allora l'equazione dei punti coniugati, in questo caso, diventa:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{100} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{R}{2} = 100 \Rightarrow R = 200 \text{ m}$$

- 2 -

L'immagine di un oggetto si forma ad una distanza q = 20 cm da una lente piano-convessa di indice di rifrazione n = 1,5 e raggio di curvatura R = 10 cm.
Calcolare la distanza p oggetto-lente.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Si consideri l'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

in cui, nella presente circostanza, si ha:

- q = 20 cm
- n = 1,5
- R_1 = 10 cm
- R_2 = ∞

segue:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f} = (0{,}5)\left(\frac{1}{10} - 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{20}$$

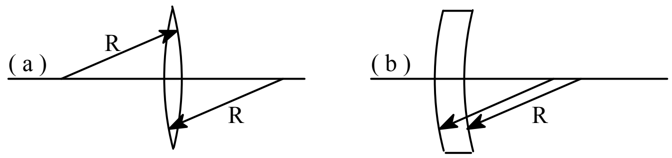
allora, se 1 / f = 1 / 20, è evidente che f = 20 cm (dato che il raggio di curvatura R_1 era stato dato in cm). Ma allora è f = q, quindi, sempre per l'equazione dei punti coniugati si ha:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = \frac{1}{20} - \frac{1}{20} =$$

e se 1 / p = 0, allora p = 1 / 0, cioè è $p = \infty$.

- 3 -

Quali sono le lunghezze focali delle lenti mostrate in figura? (Indice di rifrazione del vetro n = 1.5 e R = 10 cm).
Che cosa risulta dal confronto della lunghezza focale della lente (b) con una lastra piana di vetro?



- fig. 1 -

———— * ———— *SOLUZIONE* ———— * ————

Per la legge dei punti coniugati:

$$\frac{1}{f} = \left(n - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

lente (a):

tenendo presente che uno dei due raggi, essendo nello spazio virtuale, è negativo, si ha:

$$\frac{1}{f} = \left(1,5 - 1\right)\left(\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)\right) \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10}$$

quindi:

$$f = 10 \text{ cm}$$

lente (b):

avendo, ora, tutti e due i raggi dalla stessa parte, nello spazio virtuale, si ha:

$$\frac{1}{f} = \left(1,5 - 1\right)\left(-\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)\right) = 0,5\cdot\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = 0,5\cdot 0 = 0$$

quindi è:

$$f = \infty$$

Nel caso di una lastra piana di vetro, essendo entrambi i raggi infiniti (un piano, infatti, si può considerare una circonferenza di raggio infinito) la legge dei punti coniugati diventa:

$$\frac{1}{f} = \left(1,5 - 1\right)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}\right) = (\ 0,5\ )\cdot(\ 0 - 0\ ) = 0$$

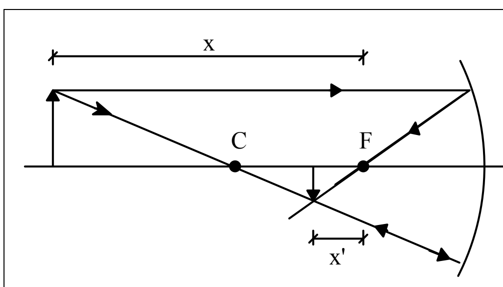
quindi è

$$f = \infty$$

Dunque la lente (b) ed una lastra piana di vetro hanno la stessa distanza focale: f = ∞.

- 4 -

Determinare la relazione che intercorre tra la distanza focale f di uno specchio concavo e la distanze x e x' del punto oggetto e del suo punto immagine dal fuoco dello specchio.



- Fig. 2 -

———— * ———— *SOLUZIONE* ———— * ————

Dalla relazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

in cui:

f è la distanza focale
p è la distanza tra l'oggetto e lo specchio
q è la distanza tra lo specchio e l'immagine

notando che:

$$x = p - f$$
$$x' = q - f$$

e quindi:

$$p = x + f$$
$$q = x' + f$$

sostituendo nell'equazione dei punti coniugati si trova:

$$\frac{1}{x + f} + \frac{1}{x' + f} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{x' + f + x + f}{\left(x + f\right)\left(x' + f\right)} - \frac{1}{f} = 0$$

$$\frac{x'f + xf + 2f^2 - xx' - x'f - xf - f^2}{xx' + x'f + xf + f^2} = 0 \Rightarrow f^2 - xx' = 0$$

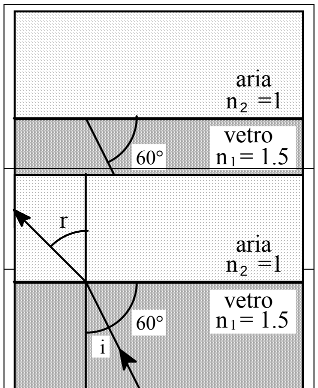
e quindi:

$$f^2 = xx' \Rightarrow x' = \frac{f^2}{x}$$

che è la relazione richiesta.

- 5 -

Determinare l'angolo di rifrazione corrispondente ad un raggio luminoso che incide sulla superficie di separazione vetro-aria, formando un angolo di 60°. (Si veda la figura qui a fianco)



- Fig. 4 -

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla Legge di Snell,

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

dove:

$\hat{i}$ = angolo d'incidenza
$\hat{r}$ = angolo di rifrazione
n_2 = indice di rifrazione dell'aria
n_1 = indice di rifrazione del vetro

si ricava:

$$\sin \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \hat{i}$$

nella quale, sostituendo i numeri, si ha:

$$\sin \hat{r} = \frac{1,5}{1} \sin 30° = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75 \Rightarrow \sin \hat{r} = 0,75$$

$$\hat{r} = \text{arc sin } 0,75 \approx 48,6° \text{ cioè: } \hat{r} \approx 48,6°$$

Degno di nota è il fatto che, per definizione, l'angolo d'incidenza - come, del resto, l'angolo di rifrazione - è quello tra il raggio incidente e la normale alla superficie d'incidenza o di separazione tra i due mezzi, quindi l'angolo da considerare è non quello di 60° dato (che è tra raggio incidente e superficie d'incidenza), ma il suo complemento a $\pi/2$, cioè: 90° - 60° = 30° come risulta dai calcoli appena eseguiti.

- 6 -

La lente di una macchina fotografica ha una lunghezza focale di +10 cm.
(a) Se la macchina è messa a fuoco su un bambino distante 2 m dalla lente, qual'è la distanza tra lente e pellicola?
(b) Se il bambino è alto 1 m, quant'è l'altezza dell'immagine sulla pellicola?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

(a) Dalla legge dei punti coniugati,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

sapendo per ipotesi che f = 10 cm e che il bambino dista 2 m, cioè che p = 2 m = 200 cm, si ha:

$$\frac{1}{200} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{20 - 1}{200} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{19}{200} \Rightarrow q = \frac{200}{19} \approx 10,53 \text{ cm}$$

(b) Per l'altezza dell'immagine sulla pellicola, si utilizza la formula dell'ingrandimento:

$$G = \frac{q}{p} = \frac{10,53 \text{ cm}}{200 \text{ cm}} \approx 0,053$$

quindi, sapendo che il bambino è alto 1 m, si ha:

$$h' = h \cdot G$$

e quindi:

$$h' = 100 \text{ cm} \cdot 0,053 \Rightarrow h' = 5,3 \text{ cm}.$$

- 7 -

Una soluzione biologica ha indice di rifrazione n = 1,41. Qual'è la velocità della luce nella soluzione? Se un raggio di luce incide sulla sua superficie con un angolo di incidenza di 45°, qual'è l'angolo di rifrazione?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

L'indice di rifrazione di un certo mezzo è definito come il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto, c, e quella nel mezzo in esame, v_1, cioè:

$$n = c / v_1$$

dato che l'incognita, ora, è v_1, si ha:

$$n = \frac{c}{v_1} \Rightarrow v_1 = \frac{c}{n}$$

e quindi, se è:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

si ha:

$$v_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{1,41} \approx 2,13 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

per la legge di Snell:

$$\frac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = \frac{n_r}{n_i}$$

dalla quale, se con $\hat{i}$ e con $\hat{r}$ si intendono rispettivamente l'angolo d'incidenza e di rifrazione, mentre con n_i ed n_r, l'indice di rifrazione del mezzo d'incidenza e di quello di rifrazione entrambi rispetto al vuoto, si ha:

$$\frac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = \frac{n_r}{n_i} \Rightarrow \frac{\sin\hat{r}}{\sin\hat{i}} = \frac{n_i}{n_r} \Rightarrow \sin\hat{r} = \frac{n_i}{n_r} \cdot \sin\hat{i}$$

se si considera che il raggio luminoso provenga dall'aria, si ha che $n_i \approx 1$, quindi:

$$\sin\hat{r} = \frac{n_i}{n_r} \cdot \sin\hat{i}$$

da cui:

$$\sin\hat{r} = \frac{1}{1,41} \cdot \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5$$

e quindi:

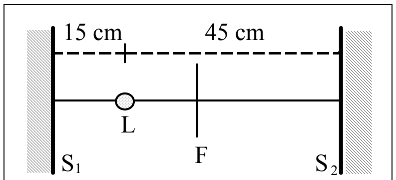
$$\hat{r} = \arcsin 0,5 \Rightarrow \hat{r} \approx 30°$$

- 8 -

Tra due schermi bianchi paralleli, S_1 ed S_2, è posta una piccola sorgente di luce, L. Essa dista 15 cm da S_1 e 45 cm da S_2. Tra la sorgente luminosa e lo schermo più distante viene collocato un filtro assorbente, F, che lascia passare solamente la metà della luce che cade su di esso. Qual'è il rapporto I_1 / I_2 delle intensità di illuminazione su S_1 ed S_2?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Poiché l'intensità d'illuminazione di uno schermo dipende dal quadrato della distanza tra esso e la sorgente, il rapporto richiesto, I_1 / I_2, se non ci fosse alcun filtro, altro non è che quello tra i quadrati delle rispettive distanze dei due schermi dalla sorgente L:



- Fig. 5 -

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{(15\text{ cm})^2}{(45\text{ cm})^2} = \frac{225\text{ cm}^2}{2025\text{ cm}^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 9$$

Ma siccome tra la sorgente e lo schermo S_2 c'è il filtro, F, che assorbe la metà della luce che lo colpisce, tale rapporto va raddoppiato:

$$\frac{I_1}{I_2} = 9 \cdot 2 = 18 \Rightarrow I_1 = 18\, I_2$$

e cioè la luce che colpisce lo schermo S_1 è 1 / 18 di quella che colpisce S_2.

- 9 -

Un proiettore di diapositive è posto ad una distanza di 12 m da uno schermo largo 1,5 m. Quale distanza focale deve avere la lente se si vuole che l'immagine di una diapositiva da 35 mm copra tutto lo schermo?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Volendo che una diapositiva larga 35 mm, proiettata, copra del tutto lo schermo largo 1,5 m, cioè 1500 mm, occorrerà un ingrandimento, G, di:

$$\frac{1500}{35} \approx 42{,}9$$

Dalla formula dell'ingrandimento, si ha:

$$G = \frac{q}{p} \Rightarrow p = \frac{q}{G} = \frac{12}{42{,}9} \Rightarrow p = 0{,}28\ \text{m}$$

Per la distanza focale, f, si utilizza la formula dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{f} \approx 3{,}65\ \text{m}^{-1} \Rightarrow f = 0{,}27\ \text{m}$$

cioè f = 27 cm

- 10 -

Determinare la distanza focale delle lenti per occhiali adatti ad una persona che ha il punto prossimo a 150 cm. Qual'è potere diottrico di queste lenti (in diottrie)?

——— ∗ ——— *SOLUZIONE* ——— ∗ ———

Per un occhio normale il punto prossimo deve essere a 25 cm. Occorre, quindi, una lente che dia le immagini degli oggetti situati a 25 cm da essa, a 150 cm sempre dalla stessa parte, e quindi, tali immagini, devono essere virtuali. Dalla legge dei punti coniugati, si ha:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{25} + \frac{6\ -\ 1}{-\ 150} = \frac{5}{150} = \frac{1}{30} \Rightarrow f = +\ 30\ \text{cm}$$

Il potere diottrico in diottrie è dato da 1 / f con f espresso in metri (allora 30 cm = $3{,}0 \cdot 10^{-1}$ m); quindi il potere diottrico delle lenti cercate, P, sarà:

$$P = \frac{1}{3{,}0 \cdot 10^{-1}} \approx 3{,}3\ \text{diottrie}$$

- 11 -

A che distanza si trova un albero alto 25 m se la sua immagine sulla retina è 10 mm?

——— ∗ ——— *SOLUZIONE* ——— ∗ ———

Se l'albero è alto 25 m = 2500 cm e la sua immagine è alta 10 mm = 1 cm, l'ingrandimento, sarà dato dal rapporto tra queste due altezze:

$$G = \frac{1}{2500} = 4 \cdot 10^{-4}$$

ma, inoltre, dalla definizione di ingrandimento, si ha:

$$G = \frac{q}{p}$$

dove q è la distanza dell'immagine dalla lente (in questo caso quella del cristallino dalla retina che si sa essere circa 2 cm = $2 \cdot 10^{-2}$ m), e p, quella tra l'oggetto e la lente. Avendo, ora, sia G che q, non resta che calcolare p:

$$p = \frac{q}{G} = \frac{2}{4 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{4} = 5{,}0 \cdot 10^{3}\ \text{cm} = 50\ \text{m}$$

- 12 -

Qual'è la distanza focale di una lente di ingrandimento che ha un potere d'ingrandimento di 10×? A che distanza deve essere l'oggetto perché si abbia questo ingrandimento?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Nel caso delle lenti d'ingrandimento,

$$G = \frac{25}{f} - 1 \Rightarrow 10 = \frac{25}{f} - 1 \Rightarrow 11 = \frac{25}{f} \Rightarrow f = \frac{25}{11} \approx 2{,}3 \text{ cm}$$

E per trovare la distanza, q, cui deve essere l'oggetto per avere l'ingrandimento 10 ×, si risolve un sistema tra la definizione d'ingrandimento e la legge dei punti coniugati:

$$\begin{cases} \dfrac{q}{p} = 10 \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 10\,p \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{10p} = \dfrac{1}{f} \end{cases} \Rightarrow \frac{10 + 1}{10\,p} = \frac{1}{f}$$

e quindi:

$$\frac{11}{10\,p} = \frac{11}{25} \Rightarrow f = \frac{10\,p}{11} = \frac{25}{11} \Rightarrow 10\,p = 25 \Rightarrow p = 2{,}5 \text{ cm}$$

- 13 -

Una macchina fotografica con teleobiettivo di distanza focale 500 mm scatta una foto di un oggetto distante 60 m. A che distanza dall'oggetto si dovrebbe porre una macchina fotografica con obiettivo di 50 mm per avere un'immagine delle stesse dimensioni?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Per avere un'immagine delle stesse dimensioni, si deve avere lo stesso ingrandimento:

$$G = \frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}$$

Dall'equazione dei punti coniugati si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p - f}{f\,p} \Rightarrow q = \frac{f\,p}{p - f}$$

ed ora:

$$G = \frac{1}{p} \cdot \frac{f\,p}{p - f} = \frac{f}{p - f} \Rightarrow$$

e quindi:

$$G = \frac{5 \cdot 10^2}{60 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2} = \frac{5 \cdot 10^2}{600 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^2} = \frac{5 \cdot 10^2}{595 \cdot 10^2} = \frac{5}{595} = \frac{1}{119}$$

Se G rimane costante, ma f diventa 50 mm, esplicitando p dall'equazione precedente, si ha:

$$G = \frac{f}{p - f} \Rightarrow f = \left(p - f\right) G \Rightarrow p = \frac{f + f\,G}{G} = \frac{f}{G} \cdot (1 + G)$$

cioè:

$$p = 50 \cdot 119 \cdot \left(1 + \frac{1}{119}\right) = 50 \cdot 119 \cdot \frac{120}{119} = 50 \cdot 120 \Rightarrow p = 6000 \text{ mm} = 6 \text{ m}$$

- 14 -

Due lenti, di distanze focali f_1 = 30 cm e f_2 = 3 cm rispettivamente, vengono usate per costruire un piccolo telescopio con disposizione delle lenti detta *afocale*.

a) Quale della due lenti dovrebbe costituire l'obiettivo?
b) Qual'è il potere d'ingrandimento del telescopio?
c) A che distanza, d, devono essere poste le due lenti?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

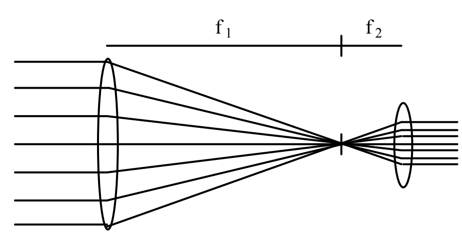
a) La lente f_2 . Infatti l'immagime di oggetti molto lontani prodotta dall'obiettivo alla sua distanza focale, f_1, per l'oculare funge da oggetto e si trova in corrispondenza del suo primo fuoco, f_2 . Quest'ultima lente, quindi, si comporta da lente d'ingrandimento, per cui, minore è la sua distanza focale e maggiore è il suo potere d'ingrandimento, come si evince dalla formula:

$$G = \frac{25}{f} - 1$$

Per costruire un telescopio, allora, si deve mettere la lente con distanza focale maggiore, f_1, come obiettivo, e l'altra, f_2, come oculare.

b) Per l'ingrandimento, si ha:

$$G = \frac{q}{p}$$



- Fig. 6 -

Nel caso di un telescopio l'immagine, che normalmente proviene da oggetti molto lontani (e quindi i raggi luminosi che raggiungono la lente sono paralleli al suo asse ottico principale), si forma approssimativamente nel fuoco della prima lente. La seconda deve formare un'immagine notevolmente ingrandita di quella della prima, che ora funge da oggetto. E' necessario, quindi, fare in modo che la distanza tra oggetto e lente, la seconda, coincida circa con la sua distanza focale, f_2 . Allora, in questo caso, si avrà:

$$q = f_1 \qquad p = f_2$$

e quindi:

$$G = \frac{q}{p} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow G = \frac{30\ \text{cm}}{3\ \text{cm}} = 10\ \times$$

c) Per il motivo della risposta b), le lenti devono essere devono essere disposte in modo che l'immagine della prima sia l'oggetto della seconda, e quindi queste due distanze devono essere sommate, cioè per avere la distanza, d, tra le lenti del telescopio, bisogna sommare le loro distanze focali:

$$d = f_1 + f_2 = 30 + 3 = 33\ \text{cm} = 330\ \text{mm}$$

- 15 -

Una lente sottile biconvessa realizzata con vetro di indice di rifrazione n = 1,5 ha entrambi i raggi di curvatura di 20 cm. Un oggetto alto 2 cm è posto a 10 cm dalla lente. Si trovi la distanza focale della lente in cm, il potere diottrico espresso in diottrie, la posizione dell'immagine e la sua altezza, entrambe in cm, nonchè il tipo di immagine.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalle seguenti relazioni:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

e

$$\frac{1}{f} = \left(n - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

si ha:

$$\frac{1}{f} = \left(1,5 - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{20} - \left(- \frac{1}{20} \right) \right) = 0,5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \Rightarrow f = 20 \text{ cm}$$

e se l'oggetto si trova a 10 cm dalla lente, è, per definizione, p = 10 cm, per cui:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{q} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{20} \Rightarrow q = -20 \text{ cm}$$

Calcolo dell'ingrandimento:

$$G = \frac{|q|}{|p|}$$

cioè:

$$G = \frac{20}{10} = 2$$

e quindi, se l'ingrandimento G = 2 ×, l'altezza dell'immagine sarà:

$$h' = G \cdot h$$

cioè:

$$h' = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}$$

- 16 -

Una lente di distanza focale f proietta su uno schermo l'immagine di un oggetto luminoso ingrandito M volte. Calcolare la distanza dello schermo in funzione di f e di M.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Mettendo a sistema l'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

(in cui con " p " s'intende la distanza tra l'oggetto e la lente e con " q " quella tra l'immagine, e quindi lo schermo, e la lente stessa) e la definizione di ingrandimento:

$$G = \frac{q}{p}$$

e quindi:

$$M = \frac{q}{p}$$

si ha:

$$\begin{cases} p = \dfrac{q}{M} \\ \dfrac{M}{q} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f} \end{cases} \qquad \begin{cases} p = \dfrac{q}{M} \\ \dfrac{M+1}{q} = \dfrac{1}{f} \end{cases} \qquad \begin{cases} p = \dfrac{q}{M} \\ q = f\left(M+1\right) \end{cases}$$

dunque l'equazione:

$$q = f\,(\,M + 1\,)$$

è un'espressione di q in funzione di f e di M.

- 17 -

Dal punto di vista ottico, una macchina fotografica può essere considerata semplicemente come una lente convergente (l'*obiettivo*), che forma un'immagine reale su di uno schermo (la *pellicola*). Se la distanza focale vale 50 mm, e se l'obiettivo può essere spostato verso l'esterno, allontanandolo dalla pellicola fino a 60 mm, quanto vale la distanza minima a cui questa macchina può fotografare?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Nell'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

bisogna trovare il valore di p quando:
q = 60 mm
f = 50 mm
e cioè:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{q - f}{q\,f} \Rightarrow p = \frac{q\,f}{q - f} \Rightarrow p = \frac{60 \cdot 50}{60 - 50} = \frac{3000}{10} = 300 \text{ mm} = 30 \text{ cm}$$

- 18 -

Se una sostanza ha indice di rifrazione $n_R = 1{,}46$ per un certo raggio monocromatico R, mentre per un altro raggio monocromatico, V, il suo indice di rifrazione è $n_V = 1{,}606$. Quale dei due raggi viene deviato di più, entrando nella sostanza considerata? Quale dei due raggi si propaga più velocemente? Qual'è il rapporto delle velocità v_R / v_V?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla definizione di indice di rifrazione:

$$n = \frac{c}{v}$$

in cui:

$c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m s^{-1} velocità della luce nel vuoto
v = velocità della luce nel mezzo di cui n è l'indice di rifrazione

Il raggio meno viene deviato dal mezzo in cui entra, e più si propaga velocemente in tale mezzo, quindi è sufficiente confrontare le velocità del raggio nei due mezzi. Per fare ciò si esplicita v nella definizione di indice di rifrazione:

$$v = \frac{c}{n}$$

e quindi:

$$v_R = \frac{c}{n_R} \Rightarrow v_R = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}46} = 2{,}05 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_V = \frac{c}{n_V} \Rightarrow v_V = \frac{3 \cdot 10^8}{1,606} = 1,87 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

essendo $v_R > v_V$, il raggio R si propaga più velocemente, e verrà deviato di meno che il raggio V. Infatti, dalla legge di Snell:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = n_{r,i}$$

se i due raggi incidono nel mezzo con lo stesso angolo d'incidenza, si avrà:

$$\sin \hat{i}_V = \sin \hat{i}_R$$

allora sapendo anche:

$$\sin \hat{i}_V = n_V \sin \hat{r}_V$$

e

$$\sin \hat{i}_R = n_R \sin \hat{r}_R$$

si ha:

$$n_V \sin \hat{r}_V = n_R \sin \hat{r}_R \Rightarrow \sin \hat{r}_V = \frac{n_R}{n_V} \sin \hat{r}_R$$

e passando ai valori numerici:

$$\sin \hat{r}_V = \frac{1,46}{1,606} \sin \hat{r}_R \Rightarrow \sin \hat{r}_V \approx 0,9 \sin \hat{r}_R \Rightarrow \hat{r}_V < \hat{r}_R$$

quindi, a parità di angolo d'incidenza, l'angolo di rifrazione del raggio V è più piccolo di quello del raggio R: ciò significa che, come volevasi dimostrare, V, avvicinandosi di più alla normale rispetto ad R, risulta più deviato.
Il rapporto tra le velocità v_R / v_V è:

$$\frac{v_R}{v_V} = \frac{2,05 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1,87 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 1,1$$

- 19 -

Calcolare la distanza focale che assume una lente da 5 diottrie in aria, fatta con vetro di indice di rifrazione $n_2 = 1,52$, quando è immersa in un liquido di indice di rifrazione $n_1 = 1,32$.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Poiché il potere diottrico di una lente, per definizione, è dato dall'inverso della sua distanza focale espressa in metri, se la lente è da 5 diottrie, in aria, sarà:

$$f_{aria} = \frac{1}{5} \text{ m} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

Dalla formula dei punti coniugati per una lente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

dove n è l'indice di rifrazione del materiale di cui è costituita la lente. Questa relazione si ricava dalla somma termine a termine delle equazioni dei punti coniugati dei due diottri costituenti la lente, ove si è supposto $n_1 = 1$ (dato che la lente è in aria). Ma se $n_1 \neq 1$, si ha:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{q} = \left(n_2 - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow n_1\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \left(n_2 - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

e quindi:

$$\left(\frac{n_2 - 1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

dato che la lente si suppone sottile, è lecito fare l'approssimazione seguente:
da:

$$\frac{n_2 - 1}{n_1}$$

a:

$$\frac{n_2}{n_1} - 1$$

che porge:

$$\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Il primo termine rappresenta $1/f_l$, cioè l'inverso della distanza focale che ha la lente quando è immersa nel liquido. Quindi:

$$\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f_l}$$

Sapendo che:

$$f_{aria} = 0{,}2 \text{ m}$$

e che

$$\frac{1}{f_{aria}} = \left(n - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{\left(n - 1\right)f_{aria}}$$

quindi:

$$\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\frac{1}{f_{aria}\left(n_1 - 1\right)} = \frac{1}{f_l}$$

e passando ai valori numerici:

$$\frac{1}{f_l} = \left(\frac{1{,}52}{1{,}32} - 1\right)\frac{1}{0{,}2\left(1{,}52 - 1\right)} = 1{,}44 \text{ m}^{-1} \Rightarrow f_l \approx 0{,}69 \text{ m} = 69 \text{ cm}$$

- 20 -

Nel vuoto la luce rossa ha una lunghezza d'onda $\lambda_0 = 600$ nm. Se essa incide su una lastra di vetro di indice di rifrazione $n_v = 1{,}5$, calcolare:

1. la velocità della luce nel vetro
2. la lunghezza d'onda λ_v nel vetro.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

1. Dalla definizione di indice di rifrazione,

$$n_v = \frac{c}{v_v}$$

in cui

c = velocità della luce nel vuoto: $c = 3{,}0 \cdot 10^8\ ms^{-1}$
v_v = velocità della luce nel vetro, da trovare

si ha:

$$v_v = \frac{c}{n_v} \Rightarrow v_v = \frac{3 \cdot 10^8\ ms^{-1}}{1{,}5} = 2{,}0 \cdot 10^8\ ms^{-1}$$

2. Dalla definizione di velocità di un'onda:

$$v = \lambda\,\nu$$

dove ν è la frequenza dell'onda, indipendente dal mezzo in cui questa si propaga, si ha:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_v}{\lambda_v} = \frac{c}{\lambda_c} \Rightarrow \lambda_v = v_v \frac{\lambda_c}{c}$$

e, ricordando che:

$$1\ nm = 1{,}0 \cdot 10^{-9}\ m \qquad \Rightarrow \qquad 600\ nm = 6{,}0 \cdot 10^{-7}\ m$$

passando ai valori numerici, si ha:

$$\lambda_v = 2{,}0 \cdot 10^8\ ms^{-1} \frac{6{,}0 \cdot 10^{-7}\ m}{3{,}0 \cdot 10^8\ ms^{-1}} = 4{,}0 \cdot 10^{-7}\ m \Rightarrow \lambda_v = 400\ nm$$

- 21 -

Un oggetto luminoso è situato a 3 m da uno specchio concavo. Se la sua immagine si forma ad 1 m, calcolare la distanza focale dello specchio ed il suo raggio di curvatura.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla legge dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

se $p = 3\ m$
e $q = 1\ m$

si ha:

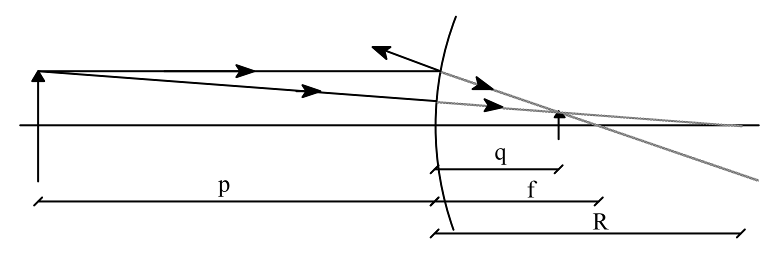
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{3}{2}\ m = 1{,}5\ m$$

- 22 -

Una freccia luminosa alta 20 cm è disposta verticalmente col proprio centro sull'asse di uno specchio convesso di raggio 80 cm. Sapendo che la freccia si trova a 2 m dallo specchio, si determini la distanza e la lunghezza della sua immagine.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla legge dei punti coniugati:



- fig. 7 -

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} - \frac{1}{p}$$

e passando ai valori numerici:

$$\frac{1}{q} = -\left(\frac{2}{80} + \frac{1}{200}\right) = -\frac{6}{200}\ \mathrm{cm}^{-1} \Rightarrow q = -33{,}3\ \mathrm{cm}$$

in cui:

p = distanza tra la freccia ed il vertice dello specchio (= 2 m)
q = distanza tra il vertice dello specchio e l'immagine
R = raggio di curvatura dello specchio (essendo nello spazio virtunale, è negativo: R = - 0.8 m)

E quindi l'immagine, virtuale, si viene a formare a 33,3 cm dall'intersezione tra lo specchio e l'asse ottico principale " *all'interno dello specchio* ".
Per l'ingrandimento, utilizzando la:

$$G = \frac{|q|}{|p|}$$

si ottiene:

$$G = \frac{33{,}3}{200} = 0{,}1665$$

essendo G positivo, l'immagine risulta dritta e la sua altezza, allora, sarà:

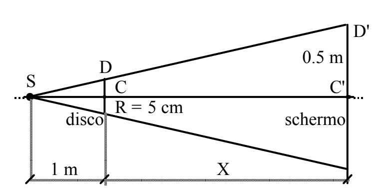
$$h = 20\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}1665 \Rightarrow h = 3{,}33\ \mathrm{cm}$$

- 23 -

Un disco opaco del diametro di 10 cm, disposto parallelamente ad uno schermo, viene illuminato da una sorgente puntiforme posta sull'asse del disco ad 1 m da questo. A quale distanza dallo schermo è posto il disco se la zona d'ombra proiettata sullo schermo ha il raggio di 0,5 m?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Poiché i triangoli S D C e S D' C' sono simili - dato che sono rettangoli in C e C', l'angolo in S è in comune, e, di conseguenza, anche il terzo angolo sarà uguale (visto che la somma degli angoli interni di un triangolo deve essere 180°) - hanno i lati omologhi in proporzione. Quindi sarà:



- Fig. 8 -

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SD'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{D'C'}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SC'}}$$

in particolare sarà:

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{SC'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{D'C'}} \Rightarrow \frac{\overline{SC}}{\overline{SC'}} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} \Rightarrow \overline{SC} = \frac{\overline{SC'}}{10}$$

e quindi:

$$\overline{SC'} = 10\,\overline{SC} = 10 \cdot 1\text{ m} \Rightarrow \overline{SC'} = 10\text{ m}$$

La distanza richiesta era X, cioè:

$$X = \overline{SC'} - \overline{SC} = 10\text{ m} - 1\text{ m} \Rightarrow X = 9\text{ m.}$$

- 24 -

Una lente biconvessa di vetro ($n_V = 3/2$), le cui facce hanno raggio di curvatura uguale, presenta nell'aria una distanza focale di 50 cm. Qual'è la lunghezza del raggio di curvatura? Se la lente fosse immersa nell'acqua ($n_A = 4/3$), quale valore assumerebbe la distanza focale?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Considerando l'indice di rifrazione dell'aria uguale a quello del vuoto, cioè 1, ed applicando l'equazione dei punti coniugati - nella quale $R_1 = R_2 = R$ per ipotesi - si ha:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

allora:

$$\frac{1}{50} = \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \cdot \left[\frac{1}{R} - \left(- \frac{1}{R} \right) \right] \Rightarrow \frac{1}{50} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{50} = \frac{1}{R}$$

e quindi:

$$R = 50\text{ cm}$$

Se la lente fosse in acqua, nella legge dei punti coniugati, n, che è il rapporto tra l'indice di rifrazione del mezzo di cui è costituita la lente e quello del mezzo in cui essa si trova, diventa:

$$n = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

Allora:

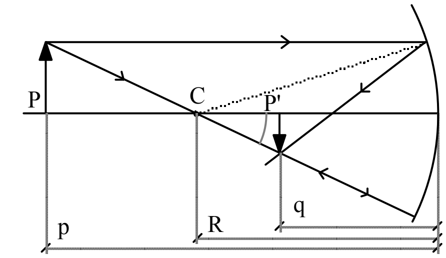
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{9}{8} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{200} \Rightarrow f = 200\text{ cm}$$

- 25 -

Una freccia luminosa alta 10 cm è posta davanti ad uno specchio concavo perpendicolarmente al suo asse e con la base su questo. Sapendo che il raggio di curvatura dello specchio è di 1 m e che la freccia è posta alla distanza di 3 m dal suo vertice, si determini la distanza dell'immagine della freccia e la sua lunghezza. Si dica inoltre se si tratta di un'immagine reale o virtuale e se è dritta o capovolta.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Per calcolare la distanza dell'immagine della freccia dal vertice dello specchio, q, si può fare ricorso all'equazione dei punti coniugati:



- *Fig. 9* -

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{f \cdot p}{p - f}$$

e, tenendo presente che, nel caso dello specchio, è:

$$R = 2\ f$$

e che, quindi:

$$f = R/2 = 50\ \text{cm}$$

si ha:

$$q = \frac{\frac{R}{2} \cdot p}{p - \frac{R}{2}} = \frac{\frac{R \cdot p}{2}}{\frac{2p - R}{2}} = \frac{R \cdot p}{2p - R}$$

e passando ai valori numerici:

$$q = \frac{100 \cdot 300}{600 - 100} = \frac{30000}{500} \Rightarrow q = 60\ \text{cm}$$

Per calcolare la lunghezza dell'immagine, cioè l'ingrandimento G, si ricorre alla formula:

$$G = \frac{q}{p} \Rightarrow G = \frac{60\ \text{cm}}{300\ \text{cm}} = \frac{1}{5}$$

allora l'altezza, h, dell'immagine sarà 1/5 di quella della freccia:

$$h = \frac{1}{5} \cdot 10\ \text{cm} \Rightarrow h = 2\ \text{cm}$$

Essendo p e q positivi, sono entrambi nello spazio reale, quindi, come si vede anche dalla figura, l'immagine risulta reale e capovolta.

- 26 -

In un blocco di vetro (indice di rifrazione relativo all'aria: 3/2) si è formata una cavità d'aria a forma di lente sottile biconvessa, le cui facce hanno raggi di curvatura rispettivamente di 20 cm e di 30 cm. Determinare la lunghezza focale della lente. Dire se si tratta di una lente convergente o divergente.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Nella formula:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

bisogna fare attenzione che l'indice di rifrazione, n, non è del vetro rispetto all'aria, come sarebbe nel caso di una lente di vetro in aria, ma dell'aria rispetto al vetro, cioè l'inverso del dato fornito dal problema, visto che in questo caso si ha una lente d'aria nel vetro; allora:

$$n = n_{V-A} = \frac{1}{n_{A-V}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow n = \frac{2}{3}$$

e quindi:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) = - \frac{1}{3} \cdot \frac{3+2}{60} = - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{60} = - \frac{5}{180} = - \frac{1}{36}$$

da cui:

$$f = - 36 \text{ cm}$$

Essendo la sua distanza focale negativa, la lente è divergente.

- 27 -

Qual'è il potere di ingrandimento di una lente di lunghezza focale f = 5 cm ? A quale distanza dalla lente deve essere posto un oggetto per avere questo ingrandimento?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dall'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

poichè in una lente d'ingrandimento l'immagine è virtuale, q è negativo, e quindi:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{q - f}{f\,q}$$

e dalla formula dell'ingrandimento:

$$G = \frac{q}{p}$$

ma, ricordando che q è negativo:

$$G = \frac{q}{p} = q \cdot \frac{1}{p} = q \cdot \frac{q - f}{f\,q} = \frac{q - f}{f} \Rightarrow G = \frac{q}{f} - 1$$

nel caso della lente d'ingrandimento, q non può essere inferiore alla distanza del punto prossimo (per un occhio normale è circa 25 cm) e quindi, tenendo presente che f = 5 cm, si ha:

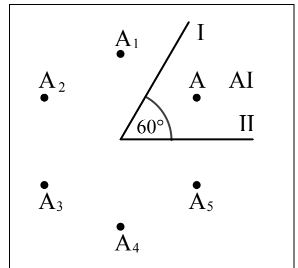
$$G = \frac{25 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} - 1 \Rightarrow G = 4\,X$$

Calcolo della distanza cui si deve mettere un oggetto affinchè, con questa lente, sia ingrandito 6 volte: ancora dalla formula dell'ingrandimento:

$$G = \frac{q}{p} \Rightarrow p = \frac{q}{G} \Rightarrow p = \frac{25}{4} = 6{,}25 \text{ cm}$$

- 28 -

Quali sono le immagini prodotte da una sorgente puntiforme A posta ad ugual distanza da due specchi piani, che formano tra loro un angolo di 60°?

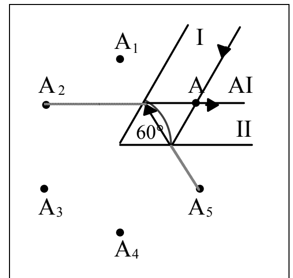


- Fig. 10 -

A_1, A_5
A_1, A_3
A_1, A_3, A_5
A_1, A_4
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5
Spiegare dettagliatamente perché utilizzando anche la costruzione grafica.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Il numero delle immagini prodotte dalla sorgente A, posta ad ugual distanza da due specchi piani che formano un angolo α, si può calcolare utilizzando la formula:



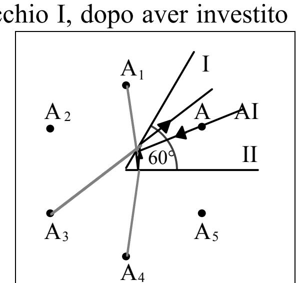
- Fig. 11 -

$$n = \frac{360}{\alpha} - 1$$

ed essendo $\alpha = 60°$ si ha:

$$n = \frac{360}{60} - 1 \Rightarrow n = 5$$

E quindi le immagini che si producono sono 5. Poichè l'unica risposta che elenca 5 immagini è la 5), significa che quest'ultima è quella esatta.
Dalla figura qui accanto, si vede che un raggio luminoso, per esempio parallelo allo specchio I, dopo aver investito A, si riflette sullo specchio II, producendo l'immagine A_5. Dopo tale riflessione, il raggio incide sullo specchio I originando, questa volta, l'immagine A_2.
Considerando, ora, un raggio qualunque, si vede che dopo la prima riflessione esso genera l'immagine A_1, dopo la seconda, A_4, e, dopo la terza, A_3.



- Fig. 12 -

- 29 -

Qual'è il potere diottrico (in diottrie) di una lente necessaria a correggere la miopia in una persona con un punto remoto di 250 cm? Nel calcolo si operi l'opportuna approssimazione. Si ricordi, inoltre che la miopia (capacità di vedere soltanto da vicino) è un difetto di vista per cui l'occhio non è più in grado di accomodare gli oggetti più lontani di una certa distanza (*punto remoto*).

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Il punto remoto, per un occhio sano, è, ovviamente, all'infinito. Quindi, il compito della lente sarà quello di "portare" alla distanza di 250 cm da essa l'immagine che si trova all'infinito o, comunque, molto lontano. E poichè tale immagine dovrà essere dalla stessa parte della sorgente e visibile senza l'ausilio di uno schermo, essa dovrà essere virtuale; allora la distanza tra essa e la lente, q, sarà negativa.
Dall'equazione dei punti coniugati, si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

la quale se:

$$p = \infty$$

e

$$q = - 250 \text{ cm} = - 2{,}5 \text{ m}$$

diventa:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-2{,}5\ m} \Rightarrow f = -2{,}5\ m$$

mentre il potere diottrico, essendo f espresso in metri è:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{-2{,}5\ m} = -0{,}4\ \text{diottrie}$$

- 30 -

In un blocco di ghiaccio si è formata una cavità d'aria a forma piano-convessa, la cui faccia convessa ha raggio di curvatura 50 cm. Determinare la lunghezza focale della lente ed il suo potere diottrico ricordando che l'indice di rifrazione del ghiaccio rispetto all'aria è n = 4/3.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Essendo la lente di aria nel ghiaccio, ed avendo l'indice di rifrazione del ghiaccio rispetto all'aria, è necessario trovare l'indice di rifrazione dell'aria rispetto al ghiaccio che è l'inverso di quello dato:
se:

$$n_{g\text{-}a} = 4/3$$

è:

$$n_{a\text{-}g} = 3/4$$

poi, dall'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{f} = \left(n_{a\text{-}g} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

discende:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{3}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{50}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{200}\ cm^{-1}$$

e quindi:

$$f = 200\ cm = 2\ m$$

Allora il potere diottrico, se f è espresso in m, per definizione sarà:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{2\ m} \Rightarrow D = 0{,}5\ \text{diottrie}$$

- 31 -

Un uomo si trova a 2 m da uno specchio piano verticale. Calcolare la distanza dell'uomo dalla sua immagine e l'ingrandimento G dello specchio.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dall'equazione:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

nella quale:

p = distanza uomo - specchio
q = distanza specchio - immagine
f = distanza focale (per uno specchio piano è $f = \infty$)

si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\infty} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} = -\frac{1}{q} \Rightarrow p = -q$$

allora se p = 2 m, sarà: q = - 2 m, cioè 2 m nello spazio virtuale (dato che il valore di q è negativo), e quindi la distanza tra l'uomo e la sua immagine è data dalla formula:

$$D = p - q$$

e quindi:

$$D = p - q = 2\ m - (- 2\ m) = 2\ m + 2\ m = 4\ m$$

L'ingrandimento, G, è dato dalla:

$$G = \frac{|q|}{|p|} \Rightarrow G = \frac{2\ m}{2\ m} = 1$$

- 32 -

Date due lenti di distanze focali $f_1 = 0{,}5$ m e $f_2 = 25$ cm, dire qual'è il potere diottrico (espresso in diottrie) del sistema formato dalle due lenti.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Il potere diottrico di una lente, D, è dato dalla:

$$D = \frac{1}{f}$$

purché la distanza focale, f, sia espressa in metri:

$f_1 = 0{,}5$ m;

$f_2 = 25$ cm $= 0{,}25$ m

Allora:

$$D_1 = \frac{1}{f_1} \Rightarrow D_1 = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ diottrie}$$

e

$$D_2 = \frac{1}{f_2} \Rightarrow D_2 = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ diottrie}$$

essendo il potere diottrico totale del sistema dato dalla somma di quelli delle due lenti, si ha:

$$D_{1,2} = D_1 + D_2 = 2 + 4 = 6 \text{ diottrie}$$

- 33 -

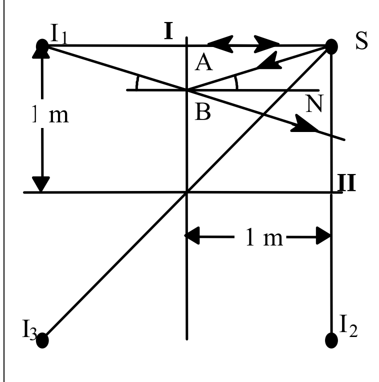
Dati due specchi piani a 90° fra di loro, determinare il numero e la posizione q delle immagini di un oggetto posto ad ugual distanza p = 1 m dai due specchi. Aiutarsi con un disegno.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

L'oggetto S, posto ad un metro da entrambi gli specchi, e quindi sulla bisettrice dell'angolo di 90° tra di essi, genera tre immagini, come si può vedere dalla seguente formula:

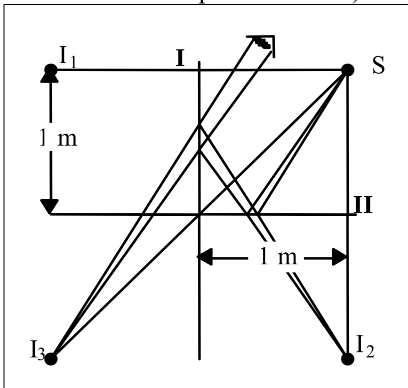
$$n = \frac{360}{\alpha} - 1 \Rightarrow n = \frac{360}{90} - 1 = 3$$

e dalla figura 13 qui accanto:



- Fig. 13 -

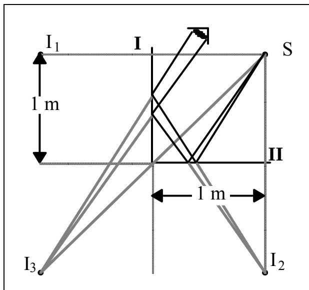
Dalla riflessione con lo specchio verticale, I, si ha l'immagine I_1.
Se si osserva il raggio, tra gli infiniti uscenti da S, che incontra lo specchio I nel punto A, si vede che esso si riflette sulla stessa retta tornando verso S; essendo l'angolo d'incidenza proprio 0°, tale sarà anche quello di riflessione (per la legge di Euclide - il raggio incidente e quello riflesso, oltre ad essere complanari, formano con la normale al punto d'incidenza due angoli uguali, detti angolo d'incidenza e angolo di riflessione -). Se ora si studia un secondo raggio uscente da S, quello che si riflette nel punto B, si nota che i prolungamenti di entrambi i raggi riflessi si incontrano nel punto I_1. Non è difficile dimostrare che i triangoli SAB e AI_1B sono uguali: infatti sono rettangoli, hanno il lato AB in comune e gli angoli in B uguali: infatti uno è l'angolo d'incidenza mentre l'altro è l'alterno interno all'angolo di riflessione. Essendo i triangoli uguali, in particolare avranno uguali i lati IS e II_1, ma IS è la distanza, p, tra la sorgente e lo specchio, cioè 1 m, allora anche q sarà 1 m (è negativo perchè si trova nello spazio virtuale).



- Fig 14 -

Nella figura 14 è mostrato come vede l'osservatore: è disegnato, cioè il fascio dei raggi uscenti da S che, dopo la riflessione con lo specchio I, raggiungono l'occhio dell'osservatore. Il punto d'incontro dei prolungamenti dei raggi riflessi è il punto immagine I_1.
Con ragionamento del tutto analogo si può dimostrare che I_2 è l'immagine di S dopo la riflessione con lo specchio orizzontale II. Anche in questo caso, visto che p = 1 m, sarà q = - 1 m.
Infine, considerando due riflessioni negli specchi, come nella figura 15 qui di fianco, un osservatore O vede anche una terza immagine, I_3, in posizione simmetrica ad S rispetto al vertice dei due specchi. Per costruirla è sufficiente prolungare idealmente gli specchi ed essa risulta contemporaneamente l'immagine di I_2 rispetto allo specchio I e di I_1 rispetto allo specchio II. In questo caso, però p sarà dato dall'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele i cui lati uguali sono lunghi 1 m, per il teorema di Pitagora:

$$p = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ m}$$



- Fig. 15 -

e, quindi, anche q = - 1,41 m.
Poiché tutte e tre le immagini si ottengono dai prolungamenti dei raggi riflessi, esse sono virtuali e, quindi, negative. Allora, come si è appena visto, si ha:

$q_1 = q_2 = - 1$ m e $q_3 = - 1{,}41$ m.

- 56 -

Un signore vede bene fino a 2 metri di distanza, cioè riesce a mettere a fuoco gli oggetti situati fino a 2 metri. Dire:

a) qual'è il difetto di vista
b) che tipo di lente correttiva occorre
c) e di quante diottrie

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

a) Il difetto di vista di chi non ha il punto remoto non è all'infinito, è la miopia.
b) Per correggere tale difetto occorre una lente che dia le immagini degli oggetti che si trovano tra il punto remoto e l'infinito, esattamente nel punto remoto. Tali immagini dovranno essere virtuali, altrimenti occorrerebbe uno schermo per raccoglierle, e dalla stessa parte degli oggetti che le producono. Lenti con tali caratteristiche si chiamano lenti divergenti.
c) Per calcolare il potere diottrico della lente che occorre in questo caso, si può procedere così: essendo il potere diottrico di una lente dato dall'inverso della distanza focale se questa è espressa in metri, e sapendo che, per sua definizione, la distanza focale, f, è la distanza in cui si formano le immagini degli oggetti a distanza infinita, e siccome in questo caso le immagini di tali oggetti devono formarsi nel punto remoto, cioè a 2 m nello spazio virtuale, deve essere:

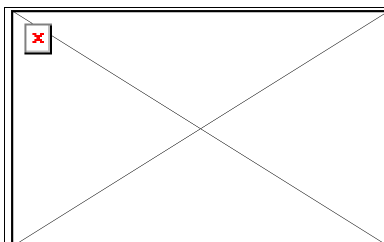
$$f = -2 \text{ m.}$$

e quindi:

$$D = \frac{1}{f} \Rightarrow D = \frac{1}{-2} = -0,5 \text{ diottrie}$$

- 57 -

Un raggio luminoso monocromatico incide sulla superficie di separeazione AB tra aria ed un mezzo liquido trasparente, come rappresentato nella figura qui di fianco. Si deduca qual'è il valore dell'indice di rifrazione rispetto all'aria del mezzo incognito.



- Fig. 22 -

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Essendo, per definizione, l'angolo d'incidenza e di rifrazione quelli tra raggio incidente, $\hat{i}$, e rifratto, $\hat{r}$ rispettivamente e la superficie di separazione tra i due mezzi nel punto d'incidenza, si ha:

$$\hat{i} = 90° - 60° \Rightarrow \hat{i} = 30°$$

e

$$\hat{r} = 90° - 67,5° \Rightarrow \hat{r} = 22,5°$$

allora, applicando la legge della rifrazione, o di Snell, nella quale con n_{aria} e con n_{inc} si intendono rispettivamente l'indice di rifrazione dell'aria e del mezzo incognito:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_{inc}}{n_{aria}} \Rightarrow \frac{\sin 30}{\sin 22,5} = \frac{n_{inc}}{n_{aria}} \Rightarrow \frac{n_{inc}}{n_{aria}} = \frac{0,5}{0,38} \approx 1,31$$

e quindi $n_{inc} = 1,31\, n_{aria}$.

- 58 -

Di quale fattore f_{A3} si ridurrà l'intensità di un raggio luminoso dopo tre riflessioni (su tre specchi), in ognuna delle quali l'intensità della luce assorbita è 1/3 di quella incidente.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se l'intensità della luce assorbita è 1/3 di quella incidente, quella riflessa sarà:

$$1 - 1/3 = 2/3$$

di quella incidente.
Quindi dopo la prima riflessione, l'intensità della luce riflessa è 2/3 di quella incidente, cioè:

$$f_{A1} = 2/3\ f_{A0}$$

e dopo un'altra riflessione:

$$f_{A2} = 2/3\ f_{A1} = 2/3 \cdot 2/3\ f_{A0} = (2/3)^2\ f_{A0}$$

infine, dopo un'ulteriore riflessione:

$$f_{A3} = 2/3\ f_{A2} = 2/3 \cdot 2/3 \cdot 2/3\ f_{A0} = (2/3)^3\ f_{A0} = 8/27\ f_{A0}$$

e allora:

$$f_{A3} \approx 0{,}296\ f_0 = 29{,}6\ \%\ f_0$$

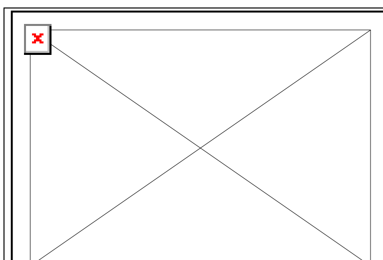
N.B. Da notare che, iterando il ragionamento, dopo n riflessioni si avrà:

$$f_{An} = (2/3)^n\ f_{A0}$$

- 59 -

Un oggetto luminoso è posto ad una distanza p = 0,5 m da uno specchio sferico con raggio di curvatura R = 2 m. Determinare:
a) se lo specchio è concavo o convesso;
b) la sua distanza focale f;
c) a che distanza q dallo specchio si forma l'immagine;
d) il tipo d'immagine
e) l'ingrandimento lineare.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———


- Fig. 23 -

a) Essendo R = 2 m, quindi R > 0, per definizione, lo specchio è concavo.
b) La sua distanza focale f, ancora per definizione, è:

$$f = \frac{R}{2} \Rightarrow f = \frac{2\ m}{2} = 1\ m$$

c) Dall'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

si ha:

$$\frac{1}{0,5} + \frac{1}{q} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1\ m^{-1} \Rightarrow q = -1\ m$$

d) Essendo q < 0, l'immagine risulta virtuale.
e) L'ingrandimento è dato dall'equazione:

$$G = \frac{|q|}{|p|}$$

f) e quindi:

$$G = \frac{1}{0,5} = +2$$

- 60 -

Mediante uno specchio sferico simile a quello dell'esercizio precedente, ma di opposta curvatura, si vuole ottenere un'immagine con la stessa q. Dire di che tipo è lo specchio e la sua distanza focale f. Calcolare, inoltre, a che distanza p si deve porre l'oggetto e l'ingrandimento lineare.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Poichè lo specchio dell'esercizio precedente era concavo, questo, avendo la curvatura opposta, sarà convesso ed il suo raggio di curvatura, ora è R = - 2 m. Calcolo della distanza focale:

$$f = \frac{R}{2} \Rightarrow f = \frac{-2}{2} = -1 \text{ m}$$

Dall'equazione dei punti coniugati, essendo R < 0, si avrà:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{f} = -\frac{2}{R}$$

e qunidi:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

da cui:

$$\frac{1}{p} = -\frac{2}{R} - \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{p} = -1 - \left(-\frac{1}{1}\right) \Rightarrow \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow p = \infty$$

infatti, se q coincide con f, per definizione, p è all'infinito.
Essendo p = ∞, l'ingrandimento lineare, che è dato dall'equazione:

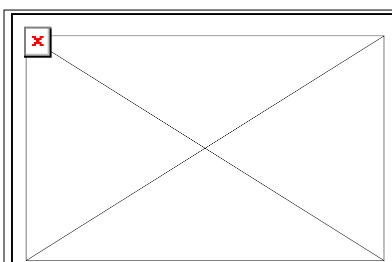
$$G = \frac{|q|}{|p|}$$

è nullo:

$$G = \frac{1}{\infty} \Rightarrow G = 0\ .$$

- 61 -

La figura qui a fianco rappresenta schematicamente la riflessione e la rifrazione di un raggio luminoso che incide sulla superficie di separazione tra due mezzi di differente indice di rifrazione. Dei sei angoli indicati, quali sono quello d'incidenza, di rifrazione e di riflessione?
Dare una spiegazione.



- Fig. 24 -

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalle definizioni degli angoli richiesti, si ha:
Definizione di angolo d'incidenza: angolo tra raggio incidente e normale nel punto d'incidenza; nella figura è β.
Definizione di angolo di riflessione: angolo tra raggio riflesso e normale nel punto d'incidenza; nella figura è γ.

Definizione di angolo di rifrazione: angolo tra raggio rifratto e normale nel punto d'incidenza; nella figura è ζ.

- 62 -

A che distanza p da una lente biconvessa, di focale f e di raggi di curvatura R_1 e R_2, deve essere posta una sorgente luminosa affinchè la sua immagine si formi in posizione simmetrica rispetto alla lente?

a) $p = f / 2$
b) $p = R_1 + R_2$
c) $p = 2\,f$
d) $p = f / (R_1 + R_2)$
e) non esiste alcuna posizione in cui mettere la sorgente luminosa che dia l'immagine nella posizione voluta.

Dare una spiegazione.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Facendo ricorso all'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

nella quale, dovendo avere l'immagine in posizione simmetrica rispetto alla lente, si avrà p = q e quindi:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{2}{p} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2\,f$$

e cioè la risposta corretta è la c).

- 63 -

Una lente biconvessa realizzata in vetro (n = 1,5) è sempre una lente convergente?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Una lente è convergente se la sua distanza focale è positiva: cioè se $f > 0$.
Analizzando la legge dei punti coniugati

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

in cui:

f è la distanza focale della lente
n_1 è l'indice di rifrazione del mezzo in cui è immersa la lente
n_2 è l'indice di rifrazione della lente
R_1 e R_2 sono i raggi della lente

In una lente biconvessa, si ha:

$$R_1 > 0 \qquad \text{mentre} \qquad R_2 < 0$$

e quindi:

$$\frac{1}{R_1} > 0$$

e

$$\frac{1}{R_2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{R_2} > 0$$

allora, essendo la seconda parentesi dell'equazione dei punti conuigati positiva, il segno di f dipende solo da quello della prima, e cioè da quanto vale il rapporto tra in due indici di rifrazione:

se é:

$$n_2 / n_1 < 1$$

allora:

$$\left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) < 0$$

e quindi anche f sarà minore di 0.
Dunque una lente biconvessa è convergente se è:

$$n_2 / n_1 > 1$$

e cioè l'indice di rifrazione della lente deve essere maggiore di quello del mezzo in cui essa è immersa.