- Grandezze fisiche e sistemi di unità di misura
- Introduzione all’analisi degli errori nelle misure sperimentali
- Introduzione all’analisi statistica dei dati sperimentali

Testi consigliati:

- J.R. Taylor, “Introduzione all’analisi degli errori”, ed. Zanichelli
- G. Cannelli, “Metodologie sperimentali in Fisica”, ed . EdiSES

Misura di una grandezza fisica

Definizione operativa:
Grandezza fisica → Proprietà misurabile

Es.

Sensazione di caldo/freddo NO (soggettiva, diversa per ciascuno)
Temperatura SI (oggettiva, uguale per tutti)

Misura di una grandezza:
- mediante un dispositivo sperimentale
- procedura riproducibile
- confronto con un'altra grandezza omogenea di riferimento
  costante e riproducibile

Espressione di una grandezza:
numero + unità di misura
rapporto tra misura e campione di riferimento

Unità di misura

Es.

Lunghezza di un corpo:

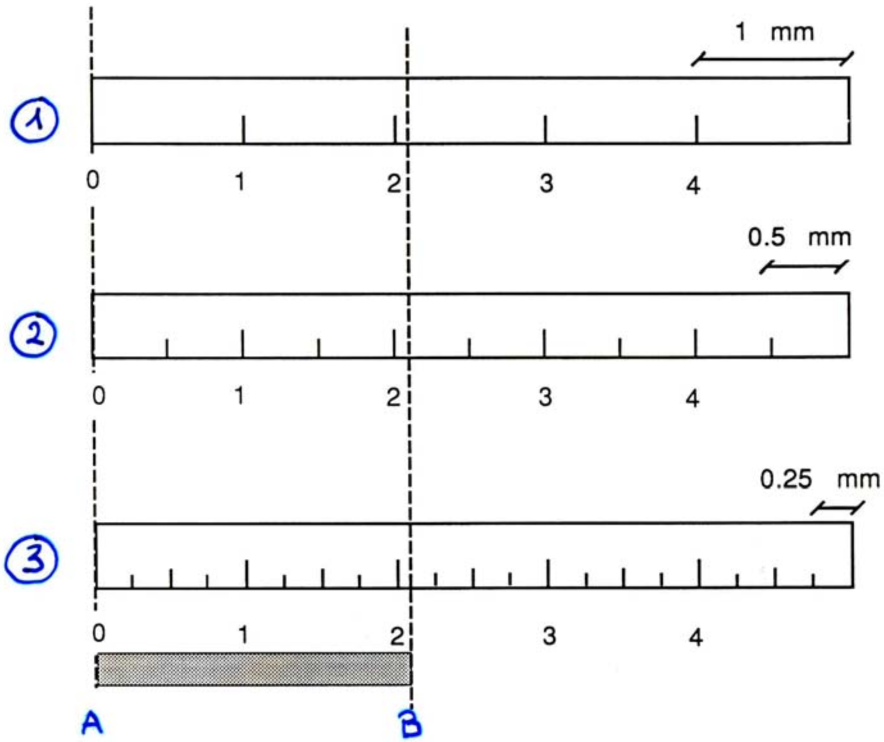
Procedere all'operazione di misura mediante uno strumento
Es. misuratore A: 3 "spanne"; misuratore B: 4 "spanne"

Confrontare il risultato con un campione fisso, preso come unità di misura
"spanna" misuratore A = 20 cm → 3 "spanne" = 60 cm
"spanna" misuratore B = 15 cm → 4 "spanne" = 60 cm uguale!

MAI dimenticare l'unità di misura!

Dire "un corpo è lungo 24" non ha senso.
Dire "la densità dell'acqua è 1" non ha senso. …e dirlo all'esame…

Esempio: misura di lunghezza con un righello



$2 < x < 3$

$x = 2.5 \pm 0.5$

$2 < x < 2.5$

$x = 2.25 \pm 0.25$

$2 < x < 2.25$

$x = 2.125 \pm 0.125$

- MISURA DELLA LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO $\overline{AB}$ CON 3 RIGHELLI GRADUATI DI SENSIBILITÀ CRESCENTE:

$$\Delta L_1 = 1 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = 0.5 \text{ mm}$$

$$\Delta L_3 = 0.25 \text{ mm}$$

Grandezze fondamentali e derivate

Fondamentali
concetti intuitivi
indipendenti l'uno dall'altro
non definibili in termini
di altre grandezze

Lunghezza	**[L]**
Massa	**[M]**
Tempo	**[t]**
Intensità di corrente	**[i]**
Temperatura assoluta	**[T]**

Derivate
definibili in termini
delle grandezze fondamentali
mediante relazioni analitiche

Superficie	**(lungh.)^2**	**$[L]^2$**
Volume	**(lungh.)^3**	**$[L]^3$**
Velocità	**(lungh./tempo)**	**$[L]\,[t]^{-1}$**
Acceleraz.	**(veloc./tempo)**	**$[L]\,[t]^{-2}$**
Forza	**(massa$\ast$acc.)**	**$[L]\,[M]\,[t]^{-2}$**
Pressione	**(forza/sup.)**	**$[L]^{-1}\,[M]\,[t]^{-2}$**

In generale: ………… $[L]^a[M]^b[t]^c[i]^d[T]^e$

Sistemi di unità di misura

Stabilire un **<u>sistema di unità di misura</u>** **=**
fissare le **grandezze fondamentali**
e il valore dei loro **campioni unitari**

Sistema	[L] lungh.	[M] massa	[t] tempo	[i] intens. corrente	[T] temper. assoluta
MKS (SI) Internazionale	m metro	kg chilogr.	s secondo	A ampere	°K gr.kelvin
cgs	cm centim.	g grammo	s secondo	A ampere	°K gr.kelvin
Sistemi pratici			vari esempi		

SI - Unità fondamentali

Intervallo di tempo **secondo (s)**

Definizione: *il secondo è la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione emessa dall'atomo di ^{133}Cs nella transizione tra i due livelli iperfini (F=4, M=0) e (F=3, M=0) dello stato fondamentale 2S(1/2).* (13a GCPM, 1967)

Note Il campione primario del secondo è costituito da un **orologio al cesio** (errore massimo relativo di 1×10^{-12}, equivalente a 1 μs ogni 12 giorni).

Lunghezza **metro (m)**

Definizione: *il **metro** è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di 1/299 792 458 di secondo*. (17a CGPM, 1983)

Massa **kilogrammo (kg)**

Definizione: Il **kilogrammo** è la massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sevres, Francia). (3a CGPM, 1901)

Note Il prototipo o campione artificiale è un cilindro di platino-iridio di 38 mm di diametro e di altezza, custodito in una tripla teca sotto vuoto. La precisione relativa del campione è dell'ordine di 10^{-9}.

Temperatura **kelvin (k)**

Definizione: *il **kelvin** è la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.* (13a CGPM, 1967)

Note Il punto triplo dell'acqua si verifica ad una pressione di 610 Pa e (per definizione) ad una temperatura di 273.16 K (0.01 °C) precisione di circa $1x10^{-6}$.

Quantità di sostanza **mole (mol)**

Definizione: *la **mole** è la quantità di sostanza che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0.012 kg di Carbonio 12.*(14a CGPM, 1971) (17a CGPM, 1983)

Note Le entità elementari possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, etc.

Il numero di entità elementari in 1 mole è il Numero di Avogadro N_A= $6.022x10^{23}$.

Intensità di corrente elettrica **ampere (A)**

Definizione: *L' **ampere** è la corrente che, se mantenuta in due conduttori paralleli indefinitamente lunghi e di sezione trascurabile posti a distanza di un metro nel vuoto, determina tra questi due conduttori una forza uguale a $2x10^{-7}$ newton per metro di lunghezza.* (9a CGPM, 1948)

Intensità luminosa **candela (cd)**

Definizione: *La **candela** è l'intensità luminosa, in un'assegnata direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540x10^{12}$ Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è 1/683 W/sr.* (16a GCPM, 1979)

Sistemi pratici e conversioni

ESEMPI DI UNITA' PRATICHE

Lunghezza	angstrom, anno-luce
Tempo	minuto, ora, giorno, anno
Volume	litro
Velocità	chilometro/ora
Pressione	atmosfera, millimetro di mercurio
Energia	elettronvolt, chilowattora
Calore	caloria
....	....

Fattori di conversione:

MKS → cgs $1\ m = 10^{2}\ cm$ $1\ kg = 10^{3}\ g$

cgs → MKS $1\ cm = 10^{-2}\ m$ $1\ g = 10^{-3}\ kg$

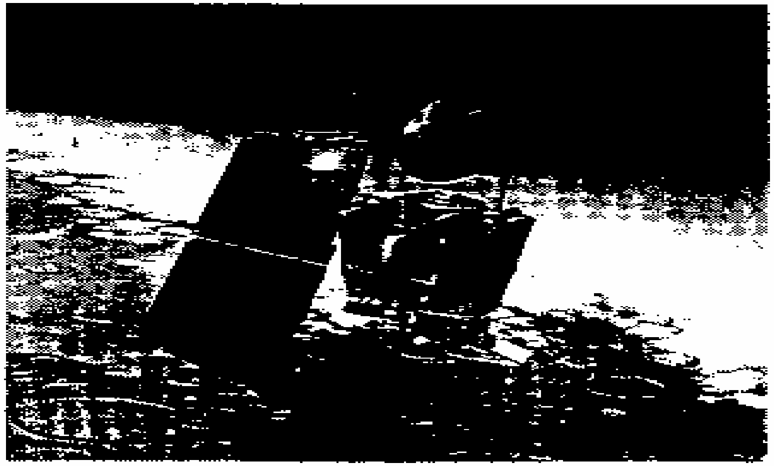
MKS, cgs → pratici proporzioni con fattori numerici noti e viceversa

Se si sbagliano le unità di misura...

SABATO 2 OTTOBRE 1999

Incredibile gaffe della Nasa

Metri invece delle yard Così la sonda «Orbiter» si disintegrò su Marte



DISTRUTTA La sonda americana «Mars Climate Orbiter»

WASHINGTON — È stato un disguido, un banale errore nelle unità di misura la causa della perdita del «Mars Climate Orbiter», il satellite per la raccolta di dati sul clima di Marte disintegratosi sul pianeta rosso il 23 settembre scorso. Una fonte della Nasa ha affermato che due squadre di tecnici di Pasadena (California) non avevano unificato i sistemi di misura: una usava quello metrico, l'altra quello inglese. In sostanza: un gruppo di tecnici immetteva nei computer dati in metri, l'altro in yard (pari a 91,5 cm); uno utilizzava i grammi, l'altro le once (pari a circa 30 grammi). Questa babele ha causato quel «rilevante errore di navigazione» che ha portato l'Orbiter troppo vicino alla superficie di Marte, dove si è disintegrato. L'errore è stato compiuto mentre la sonda, lanciata nel dicembre 1998, compiva le ultime manovre prima di entrare in orbita intorno al pianeta: è arrivata «troppo bassa», circa 60 chilometri contro i 150 previsti, ed è stata distrutta dal calore.

Multipli e sottomultipli

Formazione dei multipli e dei sottomultipli delle unità SI.

	fattore di moltiplicazione	*prefisso*	*simbolo*
Alcuni prefissi, anteposti ai simboli delle unità SI, permettono di esprimere i multipli e i sottomultipli secondo quanto riportato nella tabella qui a fianco.	1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	exa	E
	1 000 000 000 000 000 = 10^{15}	peta	P
	1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
	1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
	1 000 000 = 10^{6}	mega	M
	1 000 = 10^{3}	kilo	k
	100 = 10^{2}	etto	h
multipli	10 = 10^{1}	deca	da
sottomultipli	0,1 = 10^{-1}	deci	d
	0,01 = 10^{-2}	centi	c
	0,001 = 10^{-3}	milli	m
Esempi:	0,000 001 = 10^{-6}	micro	µ
1 mm = 1 millimetro = 10^{-3} m	0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
1 GW = 1 gigawatt = 10^{9} W	0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
1 µF = 1 microfarad = 10^{-6} F	0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
1 ns = 1 nanosecondo = 10^{-9} s	0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a

Ordini di grandezza

Per esprimere brevemente grandezze fisiche grandi o piccole:
numero a 1,2,3 cifre +
unità di misura con multiplo/sottomultiplo (di 3 in 3)

Es.

$57800\ g = 5.78 \cdot 10^4\ g = 5.78 \cdot (10^1 \cdot 10^3)\ g = 57.8\ kg$

$57.8\ kg = 57.8 \cdot 10^3\ g = 5.78 \cdot 10^4\ g$

$0.0047\ g = 4.7 \cdot 10^{-3}\ g = 4.7\ mg$

$0.00047\ g = 4.7 \cdot 10^{-4}\ g = 4.7 \cdot (10^2 \cdot 10^{-6})\ g = 470\ \mu g$

Per confrontare grandezze "infinitamente" grandi o piccole:
Ordine di grandezza = potenza di 10 più vicina al numero considerato

Es.

Atomo di idrogeno:
raggio atomo: 10^{-10} m
raggio nucleo: 10^{-15} m
→ $10^{-10}\ m / 10^{-15}\ m = 10^5$
L'atomo di idrogeno è 100000 volte più grande del suo nucleo!

Ordini di grandezza: esempi di lunghezze

Alcune lunghezze	valore in m	
- dist. del corpo celeste più lontano	10^{25} m	*(10000 miliardi di miliardi di km)*
- distanza della stella più vicina	$3.9 \cdot 10^{16}$ m	*(40000 miliardi di km)*
- anno-luce	$9.46 \cdot 10^{15}$ m	*(9000 miliardi di km)*
- distanza Terra-Sole	$1.49 \cdot 10^{11}$ m = 149 Gm	*(150 milioni di km)*
- distanza Terra-Luna	$3.8 \cdot 10^{8}$ m = 380 Mm	*(400000 km)*
- raggio della Terra	$6.38 \cdot 10^{6}$ m = 6.38 Mm	*(6000 km)*
- altezza del Monte Bianco	$4.8 \cdot 10^{3}$ m = 4.8 km	*(5 km)*
- altezza di un uomo	$1.7 \cdot 10^{0}$ m = 1.7 m	
- spessore di un foglio di carta	10^{-4} m = 100 mm	*(1/10 di mm)*
- dimensioni di un globulo rosso	10^{-5} m = 10 mm	*(1/100 di mm)*
- dimensioni di un virus	10^{-8} m = 10 nm	*(100 angstrom)*
- dimensioni di un atomo	10^{-10} m	*(1 angstrom)*
- dimensioni di un nucleo atomico	10^{-15} m	*(1/100000 di angstrom = 1 fermi)*

Ordini di grandezza: esempi di tempi

Alcuni tempi	valore in s	
- stima dell'età dell'Universo	$4.7 \cdot 10^{17}$ s	*(15 miliardi di anni)*
- comparsa dell'uomo sulla Terra	10^{13} s	*(300000 anni)*
- era cristiana	$6.3 \cdot 10^{10}$ s	*(2000 anni)*
- anno solare	$3.15 \cdot 10^{7}$ s	
- giorno solare	$8.64 \cdot 10^{4}$ s	
- intervallo tra due battiti cardiaci	$8 \cdot 10^{-1}$ s	*(8/10 di sec.)*
- periodo di vibraz. voce basso	$5 \cdot 10^{-2}$ s	*(2/100 di sec.)*
- periodo di vibraz. voce soprano	$5 \cdot 10^{-5}$	*(50 milionesimi di sec.)*
- periodo vib. onde radio (FM 100 MHz)	10^{-8} s	*(10 miliardesimi di sec.)*
- periodo di vib. raggi X	10^{-18} s	*(1 miliardesimo di miliardesimo di sec.)*

Ordini di grandezza: esempi di masse

Alcune masse	valore in kg	
- massa dell'Universo (stima)	10^{55} kg	
- massa del Sole	$1.98 \cdot 10^{30}$ kg	*(2000 miliardi di miliardi di miliardi di kg)*
- massa della Terra	$5.98 \cdot 10^{24}$ kg	*(6 milioni di miliardi di miliardi di kg)*
- massa di un uomo	$7 \cdot 10^{1}$ kg	*(70 kg)*
- massa di un globulo rosso	10^{-16} kg	*(100 milionesimi di miliardesimo di g)*
- massa del protone	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg	*(1.6 milionesimi di miliardesimo di miliardesimo di g)*
- massa dell'elettrone	$9.1 \cdot 10^{-31}$ kg	

Metodo di misura

- **Diretto** - si confronta la grandezza con l'unità di misura che è una grandezza omogenea scelta come campione
  (es. - misura diretta di una lunghezza con il metro campione
  - misura diretta di una massa con una bilancia)

- **Indiretto** - quando non si può realizzare un campione di riferimento
  (es: misura della velocità media di un punto materiale)

  - quando è impraticabile confrontare la grandezza con l'unità di misura
  (es: parallasse per le distanze astronomiche)

Caratteristiche di uno strumento di misura

- **Sensibilità** - rapporto fra la variazione unitaria nel valore lettura dello strumento (es. 1 divisione nel caso di scala graduata) e la corrispondente variazione della grandezza misurata.
  (es. - righello 1 mm/div ; cronomentro 1 s/div)

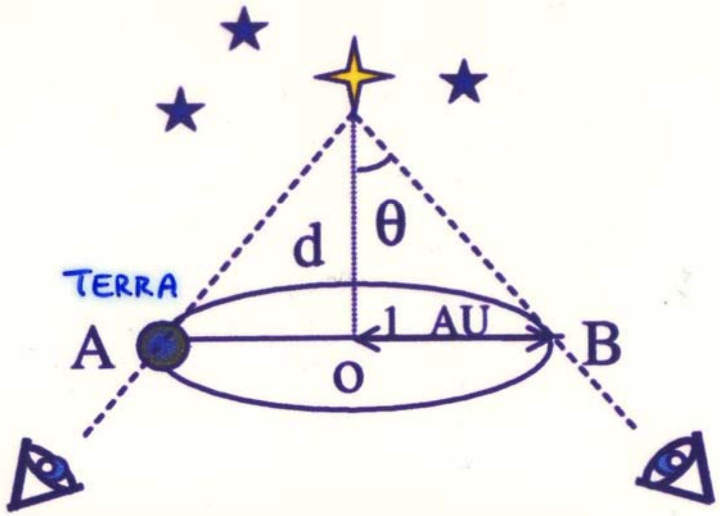
- **Precisione** - uno strumento è tanto più preciso quanto minore è il suo errore di sensibilità e quanto minore è la dispersione dei risultati ottenuti in condizioni di lavoro presumibilmenteù

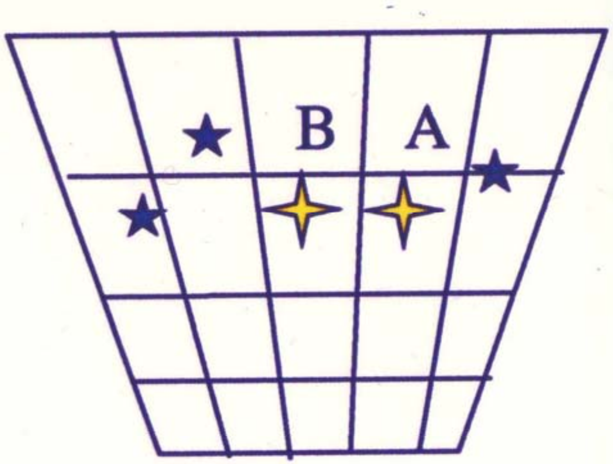
- **Range dinamico** - intervallo di valori misurabili dallo strumento
  (es. - righello 0 – 20 cm; voltmetro 0-100 V)

- **Calibrazione** - il contributo all’ errore sistematico della misura dovuto allo strumento è minimizzato da una corretta calibrazione

- **Prontezza** - inverso del tempo di salita” fra la lettura corrispondente alla condizione di riposo e quella in condizione di regime

Misura della distanza di una stella con il metodo della parallasse





$1\ AU \sim 150\ 10^6\ Km$ — UNITÀ ASTRONOMICA (AU)

$\theta = 1'' \sim 0.5\ 10^{-5}\ rad$ — SECONDO D'ARCO (1")

$$d = \frac{\overline{AO}}{tg\,\theta} \approx \frac{\overline{AO}}{\vartheta} \approx \frac{1.5\ 10^8\ km}{0.5\ 10^{-5}} \cong 3\ 10^{13}\ km$$

PARSEC (PC)

$1\ pc = 1\ AU / 1'' \sim 3.3\ ly$

ANNO LUCE (LIGHT YEAR)

$1\ ly \sim 9\ 10^{12}\ Km$

Introduzione all’analisi degli errori

Tutte le misure, per quanto accurate e scientifiche,

sono affette da incertezze.

<u>L’analisi degli “errori” è lo studio e la stima di queste incertezze</u>

$$\Downarrow$$

- Lo sperimentatore può stimare quanto siano grandi le incertezze;
- può cercare di ridurle.

L’analisi delle incertezze o “errori” nei risultati di un esperimento scientifico è di importanza fondamentale.

Descrizione preliminare

In campo scientifico le definizioni di **errore** e di **sbaglio** sono differenti.

ERRORE (dizionario GARZANTI)

In matematica: differenza, positiva o negativa, tra il valore approssimato di un numero e il suo valore esatto.

Nelle scienze sperimentali, differenza fra il valore vero e quello osservato:

errore sistematico, quello che ricorre in tutti i casi osservati in quanto dovuto allo strumento usato, al metodo o a imperizia;

errore accidentale, casuale, quello che dipende dal caso

SBAGLIO

“Errore” dovuto a momentanea disattenzione, imperizia o errata applicazione di una regola.

Sinonimi: imprecisione, fraintendimento, cantonata, distrazione, svista.

Errore come incertezza

- L'errore in un misura scientifica rappresenta l'inevitabile incertezza presente in tutte le misure.

- Al più si può cercare di renderlo il più piccolo possibile.

- Stima realistica del suo valore. Senza una giustificazione della stima degli errori, la misura ha scarso significato e spesso è inutile.

- Spesso pur essendo importanti, gli errori sono accettati istintivamente e senza considerazione esplicita (p.es. distanza tra due punti o luoghi).

Esempio sull'importanza di conoscere gli errori

Supponiamo di voler stabilire se un oggetto è di oro a 18 carati o di una lega di basso costo (problema risolto da Archimede).

$$\boxed{\rho_{oro} = \mathbf{15.5}\ \text{g/cm}^3 \qquad \rho_{lega} = \mathbf{13.8}\ \text{g/cm}^3}$$

Migliore stima di **Giorgio: 15** g/cm^3 (valore certamente compreso nell'intervallo: **13.5 <** ρ **< 16.5** g/cm^3)

Migliore stima di **Marta: 13.9** g/cm^3 (valore certamente compreso nell'intervallo: **13.7 <** ρ **< 14.1** g/cm^3)

$\Downarrow$

È possibile che entrambe le affermazioni siano corrette

Il risultato di Giorgio è inutilizzabile (praticamente) perché affetto da una grossa incertezza.

Le misure di Marta indicano in modo inequivocabile che l'oggetto non è di oro a 18 carati.

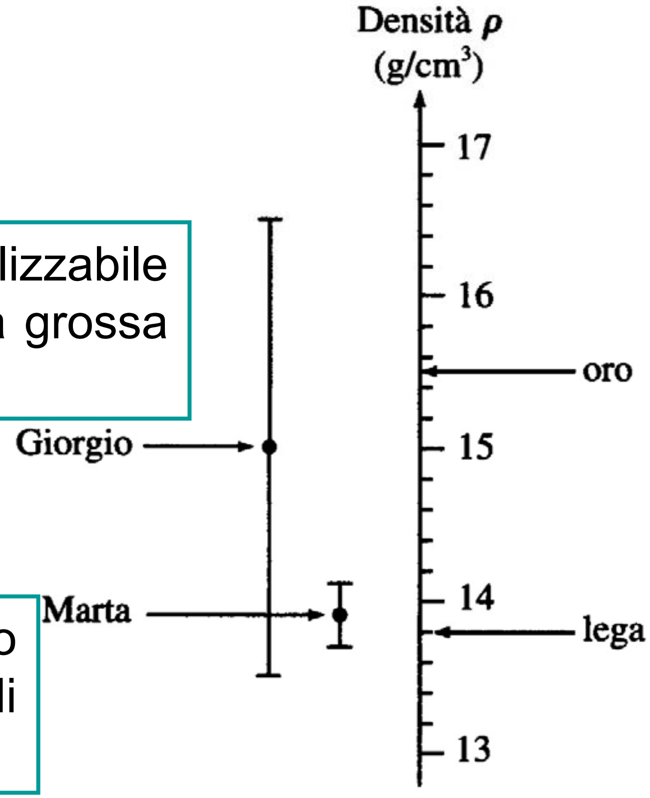


Figura 1.1. Due misure di densità di una corona che si suppone sia d'oro. I due puntini neri mostrano le migliori stime di densità di Giorgio e Marta; le due barre verticali mostrano i relativi margini di errore, ovvero gli intervalli entro cui cade probabilmente il valore della densità. L'incertezza di Giorgio è così grande che sia la densità dell'oro che quella della lega cadono all'interno del suo margine d'errore; perciò la sua misura non può stabilire quale metallo è stato usato. L'incertezza di Marta è apprezzabilmente più piccola, e la sua misura mostra chiaramente che la corona non è d'oro.

Stima degli errori nella lettura di scale

• misura della lunghezza di un oggetto con un righello

migliore stima della lunghezza = 36 mm

intervallo probabile: da 35.5 mm a 36.5 mm

Figura 1.2. La misura di una lunghezza con un righello.

• misura di una tensione con un voltmetro

migliore stima della tensione = 5.3 V

intervallo possibile: da 5.2 V a 5.4 V

Interpolazione

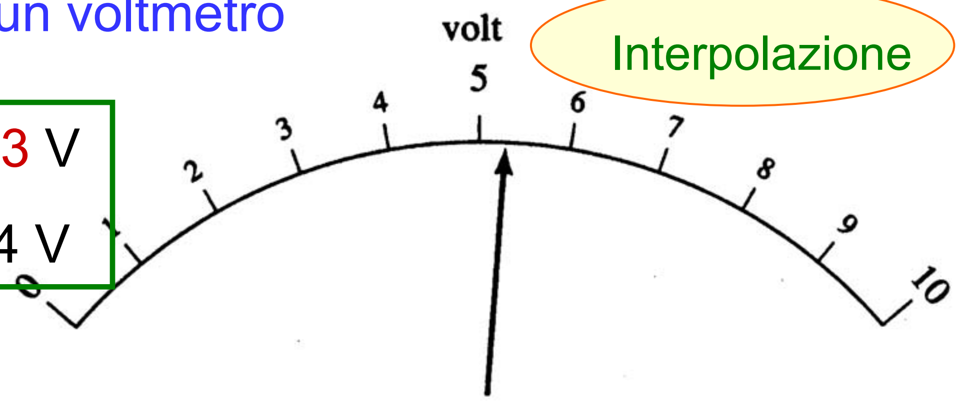


Figura 1.3. Una lettura su un voltmetro.

Stima degli errori nelle misure ripetibili

Spesso la stima delle incertezze in una misura è meno immediata di quella diretta (basata sull'individuazione di un punto su di una scala graduata).

Necessità-convenienza di ripetere (se possibile) più volte la misura

Vantaggi della ripetizione delle misure:

- Possibilità di stimare gli errori nella misura di alcune grandezze fisiche (p.es. il tempo).
- Si possono eliminare gli elementi soggettivi di valutazione (p.es. tempo di reazione)

Possibili difficoltà sperimentali:

- È importante essere sicuri di misurare sempre la stessa grandezza (p.es. forza di rottura di un filo).
- Resta comunque impossibile evidenziare errori di tipo "sistematico" (p.es. errata taratura degli strumenti, ecc.).

Esempio di misura del tempo

Supponiamo di voler realizzare una misura di un intervallo di tempo con un cronometro

• In questo caso la maggiore sorgente di errore sarà il nostro tempo di reazione.

• Una singola misura di tempo difficilmente riuscirà a fornire una stima dell'incertezza.

↓ Ripetizione della misura

<u>Sequenza dei valori misurati</u>

Valori
2.3
2.4
2.5
2.4

✓ **La migliore stima = media = 2.4 s;**

✓ **intervallo probabile: da 2.3 s fino a 2.5 s;**

✓ **errore probabile: 0.1 s**

Rappresentazione degli errori

Il modo migliore di esprimere il risultato di una misura è quello di fornire la migliore stima della grandezza e l'intervallo all'interno del quale si ha "fiducia" che essa si trovi.

Riprendiamo il risultato dell'esempio precedente.

- ✓ Migliore stima del tempo = 2.4 s;
- ✓ intervallo probabile: 2.3-2.5 s;
- ✓ errore probabile: 0.1 s

⇨ Valore misurato = 2.4 ± 0.1 s

In generale si potrà utilizzare la relazione:

$$\textbf{(valore misurato di } \boldsymbol{x}\textbf{)} = \boldsymbol{x_{best} \pm \delta x}$$

- La migliore stima di x è: x_{best}
- il valore di x sarà "ragionevolmente" all'interno dell'intervallo:

$x_{best} - \delta x$ e $x_{best} + \delta x$ (intervallo di valori probabili)

Cifre significative

Poiché δx è una stima dell'errore, essa non dovrebbe essere stabilita con eccessiva precisione.

Regola per valutare gli errori: gli errori devono essere arrotondati ad 1 max 2 cifre significative

Esempio: misura dell'accelerazione di gravità g

$$\boxed{g = 9.82 \pm 0.02385 \text{ m/s}^2}$$

4 cifre significative — TROPPE !

$$\boxed{g = 9.82 \pm 0.02 \text{ m/s}^2}$$

1 cifra significativa — CORRETTO !

- Caso in cui conviene usare 2 cifre significative:
  se p. es. $\delta x = 0.14$ allora se arrotondassimo a $\delta x = 0.1$ avremmo una riduzione dell'errore di $\approx 28\%$.
- Analogamente se avessimo come prima cifra 2 (es. $\delta x = 0.25$)

Cifre significative (2)

Regola per valutare i risultati: l’ultima cifra significativa in qualunque risultato deve essere dello stesso ordine di grandezza (ossia nella stessa posizione decimale) dell’errore.

Esempio: se $\boldsymbol{x} = \mathbf{92.86}$

- se l’ errore è **0.3** cm si scriverà: $\mathbf{x = (92.9 \pm 0.3)}$ cm
- se l’errore è **3** cm si dovrà scrivere: $\boldsymbol{x} = \mathbf{(93 \pm 3)}$ cm
- se l’errore è **30** cm si dovrà scrivere: $\boldsymbol{x} = \mathbf{(90 \pm 30)}$ cm

NOTA Se p.es. $\boldsymbol{x} = \mathbf{3.6}$ cm con errore di **1** cm

si potrà scrivere anche: $\boldsymbol{x} = \mathbf{(3.6 \pm 1)}$ cm

Cifre significative (3)

Regola per i calcoli: nei calcoli i valori numerici devono avere una cifra significativa in più di quella richiesta nel risultato finale.
Alla fine dei calcoli si dovrà arrotondare eliminando la cifra extra non significativa.

Utile convenzione

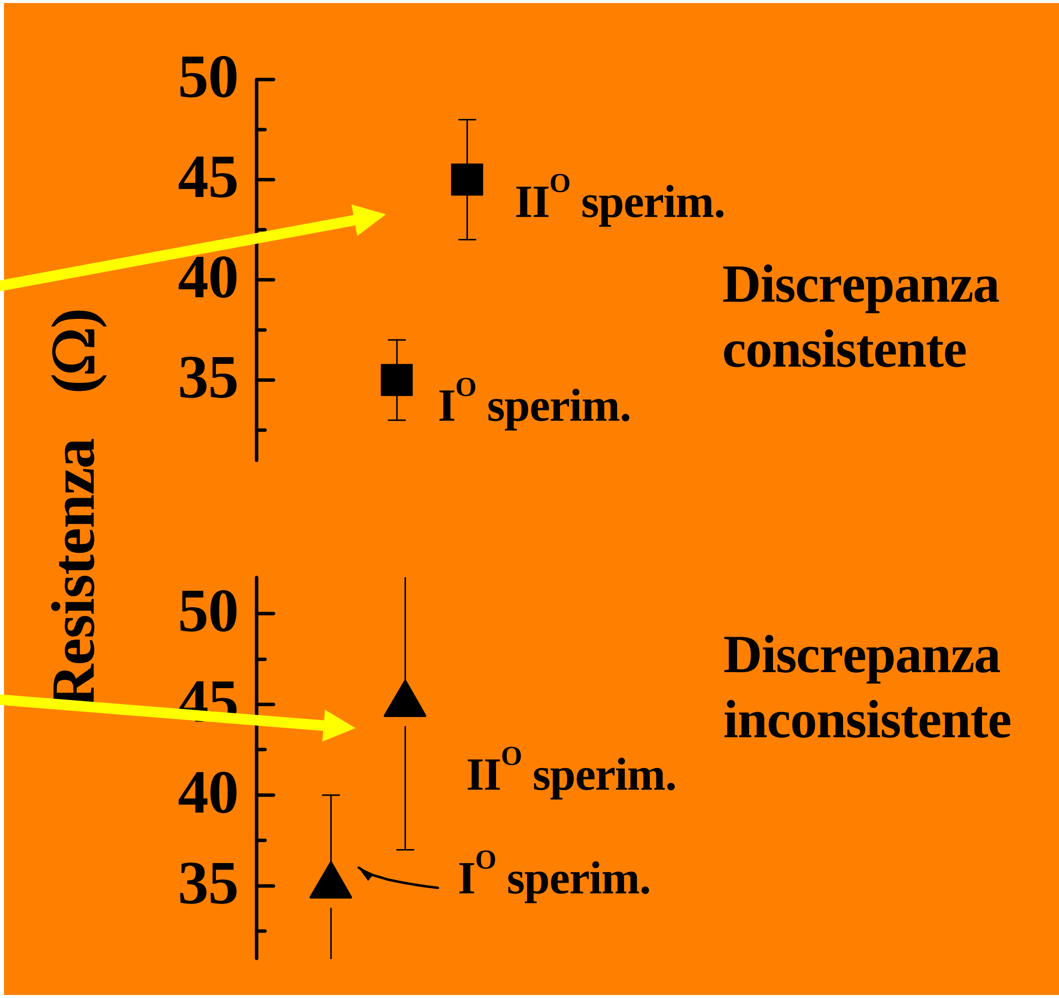
Invece di scrivere:
carica misurata = $1.61\times10^{-19} \pm 5 \times10^{-21}$ C
è preferibile scrivere: $(1.61 \pm 0.05) \times10^{-19}$ C

Discrepanza

Definizione: **la discrepanza è la differenza tra due valori misurati della stessa grandezza.**

Due studenti misurano la stessa resistenza:

- Se R_1= **35 ± 2** Ω e R_2= **45 ± 1** Ω → la discrepanza di 10 Ω è significativa: le due misure sono inconsistenti (problemi nella misura o sono stati commessi degli sbagli).
- Se R_1= **35 ± 5** Ω e R_2= **45 ± 8** Ω → la discrepanza di **10** Ω non è significativa.



Confronto di valori misurati ed accettati

Dal punto di vista dell'analisi dei dati è interessante:

- Confrontare più misure di una stessa grandezza;
- Il confronto con dati o valori noti ed accettati
- Il confronto con i valori previsti dal modello teorico

Esempio

A 3 studenti viene chiesto di misurare la velocità di propagazione di un suono in aria. Il valore accettato (noto da precedenti misure) della velocità è:

$$v_a = \mathbf{331} \text{ m/s (a 0°C, 1 bar)}$$

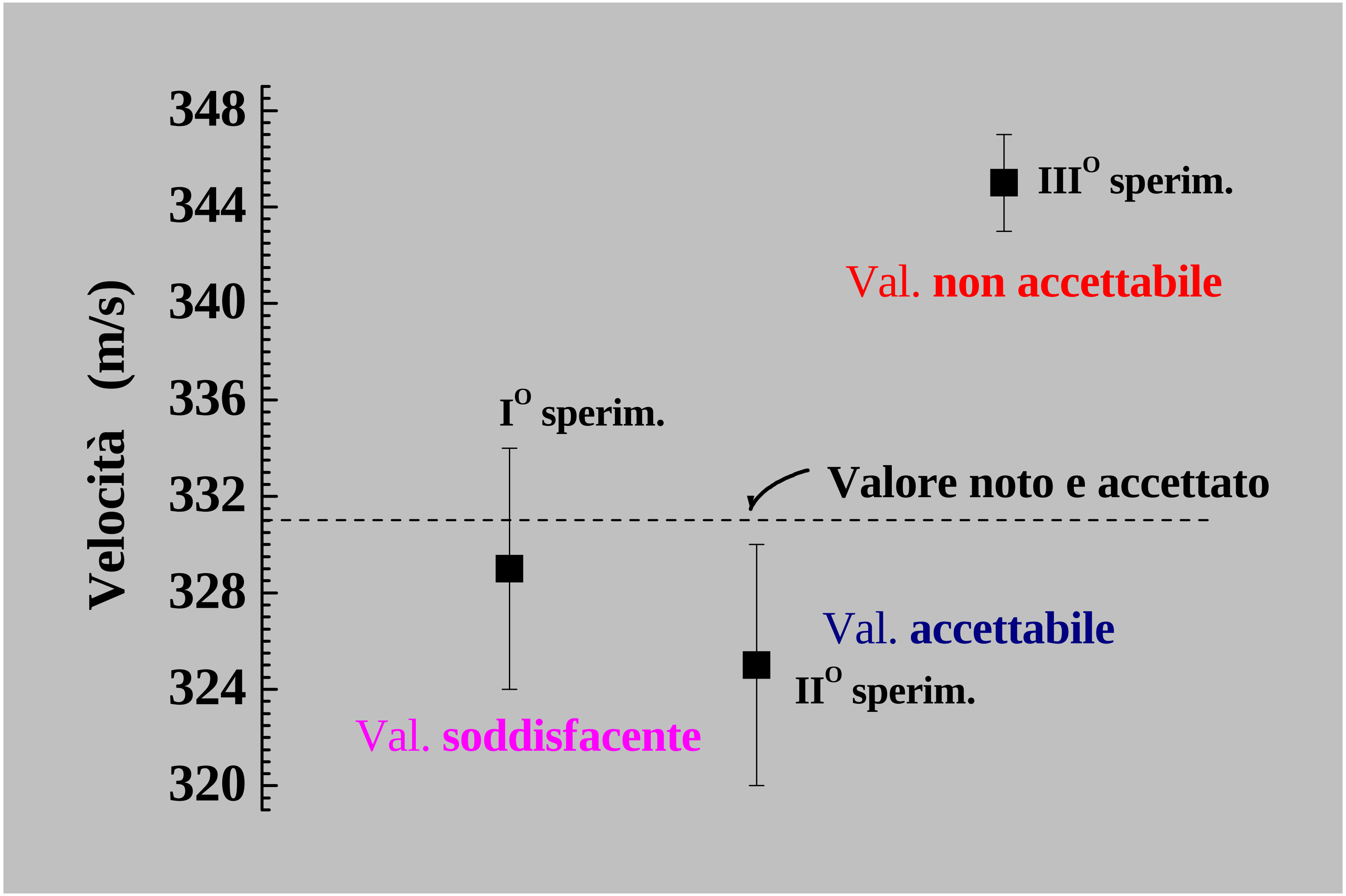
- Il 1° studente ottiene come migliore stima della velocità del suono il valore: $v_m = \mathbf{329 \pm 5}$ m/s $\Rightarrow$ **risultato soddisfacente**

- Il 2° studente ottiene come migliore stima v_m = **325 ± 5** m/s

  ⇒ Anche se il valore accettato cade di poco fuori dell'intervallo stimato ($320 \leq v_m \leq 330$) del valore misurato, possiamo considerare la misura consistente e la miglior stima di v_m ancora **accettabile**

- Il 3° studente ottiene il valore v_m = **345 ± 2** m/s

  - le misure e i calcoli devono essere rivisti;
  - l'errore è stato sottostimato;
  - il valore da confrontare potrebbe non essere quello indicato. (p.es. a 20°C: v_a = 343 m/s)
  - possibile sorgente di errore sistematico (p.es. strumento non tarato bene).



348
344
340
336
332
328
324
320
Velocità (m/s)
III° sperim.
Val. non accettabile
I° sperim.
Valore noto e accettato
Val. accettabile
II° sperim.
Val. soddisfacente

Confronto di due misure

Supponiamo di voler verificare la conservazione della quantità di moto ($p = mv$), totale per un sistema isolato:

P **iniziale** (±0.04)	***P*** **' finale** (±0.06)
1.49	**1.56**
2.10	**2.12**
1.16	**1.05**
ecc.	**ecc.**

Se per ciascuna coppia di misure gli intervalli di valori di p e p' si sovrappongono allora i risultati sono consistenti.

Un modo per rendere ancora più evidenti i risultati è quello di considerare la differenza tra ***P*** e ***P'*** e verificare se sia nulla entro l'indeterminazione sperimentale.

$$(P \text{ misurato}) = P_{best} \pm \delta P \qquad (P' \text{ misurato}) = P'_{best} \pm \delta P'$$

La migliore stima per ***ΔP= P-P'*** sarà: $\Delta P = P_{best} - P'_{best}$

Determiniamo l'errore per ***ΔP***:

$$\begin{aligned} \text{val. max probabile} &= \left(P_{best} + \delta P\right) - \left(P'_{best} - \delta P'\right) = \\ &= P_{best} - P'_{best} + \delta P + \delta P' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{val. min probabile} &= \left(P_{best} - \delta P\right) - \left(P'_{best} + \delta P'\right) = \\ &= P_{best} - P'_{best} - \delta P - \delta P' \end{aligned}$$

Combinando le ultime due equazioni si ottiene che l'incertezza nel valore di ***ΔP*** è la somma delle due incertezze (in ***P*** e ***P'***)

P iniziale (±0.04)	*P'* finale (±0.06)	***P-P'*** (±0.1)
1.49	**1.56**	**-0.07**
2.10	**2.12**	**-0.02**
1.16	**1.05**	**-0.11**
ecc.	**ecc.**	**ecc.**

L’incertezza nella differenza è la somma delle incertezze in ***P*** e ***P’***

Entro gli errori sperimentali dovremo verificare che $\Delta p = 0$

Propagazione dell'errore in somme e differenze

Siano ***x*** ed ***y*** due grandezze con errori $\boldsymbol{\delta x}$ **e** $\boldsymbol{\delta y}$, rispettivamente. Se ***q* = x+y** o ***q*=*x*-*y***, l'**errore** in ***q*** è dato da:

$$\delta q \approx \delta x + \delta y \qquad (1)$$

- Il simbolo ≈ significa relazione approssimata
- δq calcolato dalla (1) è l'errore massimo.
- In generale $\delta q < \delta x + \delta y = \delta q_{max}$
- Una stima migliore, se gli errori sono **indipendenti e casuali**, è la "somma quadratica":

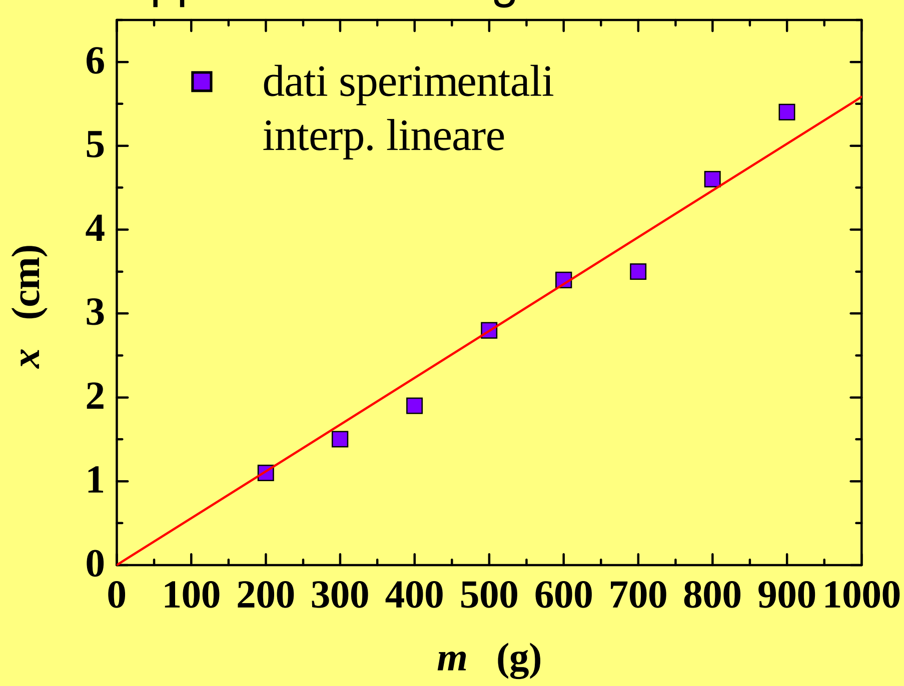
$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \qquad (1b)$$

Verifica della proporzionalità con un grafico

Consideriamo una molla e supponiamo di voler misurare gli allungamenti in funzione della massa applicata:

Carico m (g) (δm trascurabile)	200	300	400	500	600	700	800	900
Allungamento x (cm) (δx = 0.3)	1.1	1.5	1.9	2.8	3.4	3.5	4.6	5.4

Rappresentazione grafica di ***x*** vs ***m***



$$mg = kx \Rightarrow x = \left(\frac{k}{g}\right)m$$

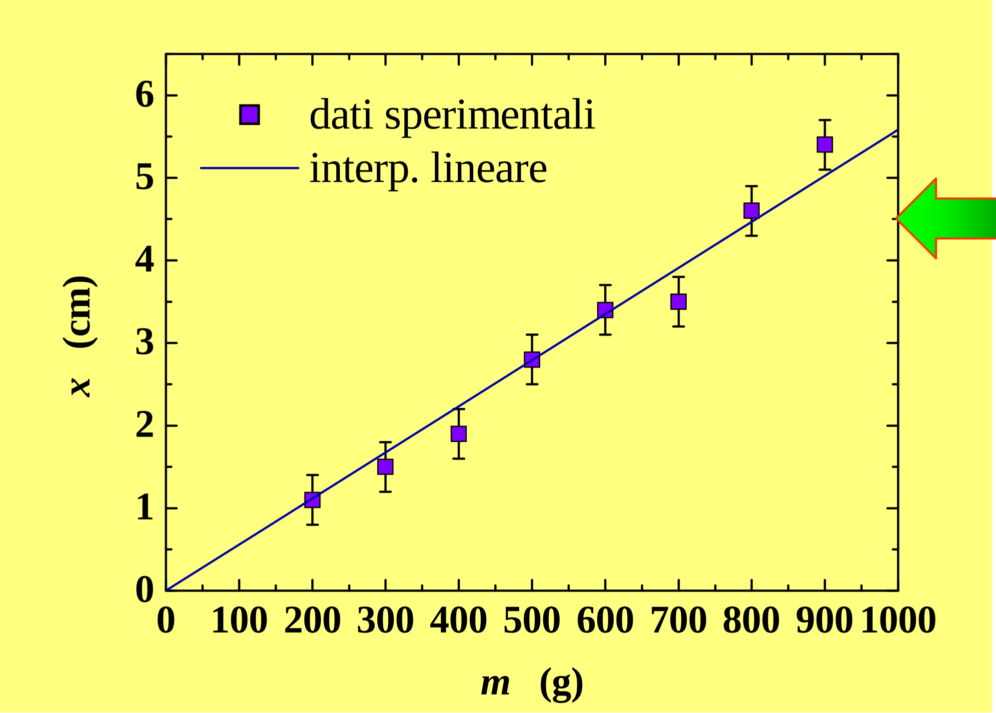
<u>I punti sperimentali non sono allineati</u>! **Perché ?**

1) Incertezze nella misura ?

2) Non linearità nella molla ?

3) Sbagli nella procedura di misura ?

Per rispondere alle domande precedenti cominciamo con il considerare le incertezze negli allungamenti, riportandoli nel grafico come barre verticali sui punti sperimentali.



La retta attraversa una percentuale elevata di barre d’errore

È verificata la proporzionalità tra ***x*** ed ***m***

Errore relativo

Il valore dell'incertezza δx per una grandezza x, non è in grado di fornire tutte le informazioni possibili.

P. es. δx = 1 cm su 1 Km $\Rightarrow$ una misura accurata;

δx = 1 cm su 3 cm $\Rightarrow$ stima grossolana

Sia x_{best} la miglior stima della grandezze x, con errore δx (errore assoluto). Si definisce **errore frazionario o errore relativo** il rapporto adimensionale:

$$\frac{\delta x}{|x_{best}|}$$

Poiché, nelle misure accurate, l'incertezza è solitamente piccola conviene esprimerla percentualmente.

P. es. supponiamo di aver misurato la lunghezza di un oggetto:

$\boldsymbol{l}$ = 50 cm con $\delta \boldsymbol{l}$ = 2 cm

(incertezza relativa) $$\boxed{\frac{\delta \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = \frac{2\text{ cm}}{50\text{ cm}} = 0.04}$$ (adimensionale)

Oppure percentualmente: $\boldsymbol{l}$ = 50 cm ± 4%

Errore relativo e cifre significative

L’errore relativo e le cifre significative sono strettamente collegati.

P.es. per un matematico dire che x = 21 ha due cifre significative vuol dire che x è più vicino a 21 che non a 20 o 22, ossia:

$$\mathbf{x = 21 \pm 0.5}$$

Da un punto di vista sperimentale la cosa è più complicata.

Ad es. se consideriamo uno strumento digitale, in funzione della classe di precisione dello strumento, 2 cifre significative possono voler dire:

$$x = 21 \pm 0.5$$

$$x = 21 \pm 1$$

$$x = 21 \pm 5$$

Si può adottare la seguente regola pratica:

Un numero, con ***N*** cifre significative,

ha un’incertezza di 1 sull’ennesima cifra.

P. es. se consideriamo i due valori:

510 0.51

e supponiamo che siano accurati fino a 2 cifre significative, ossia:

510 ± 10 o **510 ± 2%**

0.51 ± 0.01 o **0.51 ± 2%**

Quindi, entrambi i numeri sono incerti al 2%. In pratica, in questo caso, dire che i valori sono noti con due cifre significative è equivalente a dire che sono incerti al 2 %.

Comunque, la connessione è approssimata. Infatti, se consideriamo i due numeri:

110   910

e supponendo che siano accurati fino a 2 cifre significative:

110 ± 10 o 110 ± 10%

910 ± 10 o 910 ± 1%

Quindi, l’errore associato a 2 cifre significative varia dall’ 1% al 10%.

Possiamo riassumere il tutto nella seguente tabella:

Numero di cifre significative	Incertezza relativa	Valore approssimato
1	10 % - 100 %	50 %
2	1 % - 10 %	5 %
3	0. 1 % - 1 %	0.5 %

Errore in un prodotto

Supponiamo di voler calcolare $p = mv$ avendo misurato sia m che v.

$$(\boldsymbol{m}\ \text{misurato}) = \boldsymbol{m}_{best}\left(1 \pm \frac{\delta \boldsymbol{m}}{\left|\boldsymbol{m}_{best}\right|}\right)$$

$$(\boldsymbol{v}\ \text{misurato}) = \boldsymbol{v}_{best}\left(1 \pm \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\left|\boldsymbol{v}_{best}\right|}\right)$$

Poiché m_{best} e v_{best} sono le migliori stime per m e per v, la migliore stima per p sarà:

$$(\text{migliore stima per } \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}_{best} = \boldsymbol{m}_{best}\boldsymbol{v}_{best}$$

Consideriamo il massimo valore per *p:*

$$p_{\max} = m_{best} v_{best} \left(1 + \frac{\delta m}{\left| m_{best} \right|}\right)\left(1 + \frac{\delta v}{\left| v_{best} \right|}\right)$$

(Analogamente per il valore minimo considerando il segno -)

$$\left(1 + \frac{\delta m}{\left| m_{best} \right|}\right)\left(1 + \frac{\delta v}{\left| v_{best} \right|}\right) = 1 + \frac{\delta m}{\left| m_{best} \right|} + \frac{\delta v}{\left| v_{best} \right|} + \frac{\delta m}{\left| m_{best} \right|}\frac{\delta v}{\left| v_{best} \right|}$$

Poiché gli errori δm e δv sono piccoli, si può trascurare l'ultimo termine:

$$p_{\max} = m_{best} v_{best} \left(1 + \frac{\delta m}{\left| m_{best} \right|} + \frac{\delta v}{\left| v_{best} \right|}\right)$$

Confrontando con la forma generale:

$$(\text{valore di } p) = p_{best}\left(1 \pm \frac{\delta p}{|p_{best}|}\right)$$

Si ottiene che la migliore stima di *p* è:

$$p_{best} = m_{best} \cdot v_{best}$$

con errore relativo:

$$\frac{\delta p}{|p_{best}|} = \frac{\delta m}{|m_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|}$$

L’errore assoluto è:

$$\delta p = |p_{best}| \cdot \left(\frac{\delta m}{|m_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$$

Propagazione dell'errore in prodotti e quozienti

Siano ***x*** ed ***y*** due grandezze con errori ***δx*** **e** ***δy***, rispettivamente. Se ***q*** **= xy** o ***q=x/y***, l'**errore** in ***q*** è dato da:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \approx \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|} \qquad (2)$$

- ***δq/q*** calcolato dalla (2) è l'errore relativo massimo.
- la (2) è valida anche se *x* ed *y* hanno dimensioni differenti.
- gli errori $\delta x/|x_{best}|$ e $\delta y/|y_{best}|$ devono essere piccoli (<<1);
- una stima migliore, se gli errori sono **indipendenti e casuali** è la "somma quadratica":

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)^2} \qquad (2b)$$

Propagazione dell’errore in un prodotto per un numero

Sia ***x*** una grandezza con errore δ**x**. Se ***q*** **= cx**, dove c è un numero esatto**,** l’**errore** in ***q*** è dato da:

$$\delta q = c\,\delta x \qquad (3)$$

Propagazione dell’errore in una potenza

Sia ***x*** una grandezza con errore δ**x**. Se ***q*** **= x^{n}** ,

l’**errore** in ***q*** è dato da:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} = n\frac{\delta x}{|x_{best}|} \qquad (4)$$

Problema n.1

a) Uno studente misura due numeri: $x = 10 \pm 1$, $y = 20 \pm 1$

Qual è la migliore stima per il prodotto $q = xy$?

b) Fare lo stesso per le misure: $x = 10 \pm 8$, $y = 20 \pm 15$

Soluzione

a) Il valore più probabile di q:

$$q_{best} = x_{best} y_{best} = 200$$

Il più alto ed il più basso valore probabile sono, rispettivamente:

$$q_{max} = x_{max} y_{max} = 221 \quad \text{e} \quad q_{min} = x_{min} y_{min} = 181$$

Quindi, presumibilmente, il valore di q sarà compreso nell'intervallo:

$$181 < q < 221$$

Applicando la (2) per il calcolo dell'errore relativo su q:

$$\delta q/|q_{best}| = \delta x/|x_{best}| + \delta y/|y_{best}| = 1/10 + 1/20 = 3/20.$$

Da cui si ricava il valore di δq:

$$\delta q = 200(3/20) = 30.$$

$$q = q_{best} \pm \delta q = 200 \pm 30 \quad \Rightarrow \quad 170 < q < 230.$$

b) $$q_{best} = x_{best}\, y_{best} = 200 \text{ (come nel caso } \mathbf{a}\text{)}$$

$$q_{max} = x_{max}\, y_{max} = 630 \quad \text{e} \quad q_{min} = x_{min}\, y_{min} = 10$$

Quindi, presumibilmente, il valore di q sarà compreso nell'intervallo:

$$10 < q < 630$$

Applicando la (2) per il calcolo dell'errore relativo su q:

$$\delta q/|q_{best}| = \delta x/|x_{best}| + \delta y/|y_{best}| = 8/10 + 15/20 = 31/20$$

$$\delta q = 200(31/20) = 310.$$

Quindi l'intervallo in cui q giace:

$$q = q_{best} \pm \delta q = 200 \pm 310 \quad \Rightarrow \quad -110 < q < 530.$$

In questo caso l'errore su q è stato ampiamente sottostimato.

Problema n.2

Nel suo famoso esperimento con gli elettroni, J.J. Thomson misurò "il rapporto carica-massa" ***r = e/m***, dove ***e*** è la carica dell'elettrone e ***m*** la sua massa. In una versione moderna didattica di questo esperimento si trova il rapporto ***r*** accelerando gli elettroni attraverso un voltaggio ***V*** e poi deviandoli con un campo magnetico. Il rapporto ***r = e/m*** è dato dalla formula:

$$\boldsymbol{r} = \frac{125}{32\mu_o^2 \boldsymbol{N}^2} \frac{\boldsymbol{D}^2 \boldsymbol{V}}{\boldsymbol{d}^2 \boldsymbol{I}^2}$$

dove:

$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N/A^2 (permeabilità magnetica del vuoto)

N = 72 (numero di spire della bobina),

D = 661 $\pm$ 2 mm (diametro delle spire)

V = 45.0 $\pm$ 0.2 V (tensione acceleratrice degli elettr.)

d = 91.4 $\pm$ 0.5 mm (diametro della traiettoria curvilinea degli elettr.)

I = 2.48 $\pm$ 0.04 A (corrente nella bobina).

(a) Trovare la risposta dello studente per il rapporto carica-massa dell'elettrone con la sua incertezza, assumendo che tutte le incertezze siano indipendenti e casuali.

(b) Quanto bene si accorda questa risposta con il valore accettato $r = 1.759 \times 10^{11}$ C/kg ?

Soluzione

(a) Utilizzando i dati numerici a disposizione si ottiene pe ***r*** :

$$\boldsymbol{r} = \frac{125}{32 \cdot \left(4\pi \times 10^{-7}\right)\left(72\right)^2} \frac{(0.661)^2 45.0}{(0.091)^2 \left(2.48\right)^2} = 1.826 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Calcoliamo l'errore su ***r***, considerando che:

$$\boldsymbol{K} = \frac{125}{32 \mu_{\boldsymbol{o}}^2 \boldsymbol{N}^2}$$

è un termine costante privo di errore.

$$\frac{\delta \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\left(2\frac{\delta \boldsymbol{D}}{\boldsymbol{D}}\right)^2 + \left(\frac{\delta \boldsymbol{V}}{\boldsymbol{V}}\right)^2 + \left(2\frac{\delta \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}}\right)^2 + \left(2\frac{\delta \boldsymbol{I}}{\boldsymbol{I}}\right)^2} = 0.0349$$

$$\delta \boldsymbol{r} = 0.0349 \times \boldsymbol{r} = 6.4 \times 10^9 \text{ C/kg} \cong 0.06 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Il risultato del calcolo considerando l'errore si potrà riscrivere nel seguente modo:

$$\boldsymbol{r} = (1.83 \pm 0.06) \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

(b) Il risultato ottenuto è accettabile perché l'intervallo di valori probabili di ***r*** sono:

$$1.77 \times 10^{11} \leq \boldsymbol{r} \leq 1.89 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

La discrepanza tra il valore misurato e quello noto vale:

$$\Delta r = (1.83 - 1.759) \times 10^{11} \text{ C/kg} = 0.071 \text{ C/kg.}$$

$$0.06 < \Delta r < (2 \times 0.06)$$

Propagazione dell’errore in una funzione di più variabili

Se diverse grandezze ***x***, ***y*….*w*** sono misurate con errori indipendenti e casuali ***δx***, ***δy*….*δw*** ed i valori misurati sono usati per calcolare la funzione ***q*(*x, y,*…. *w*)**, l’errore in ***q*** sarà:

$$\delta q \approx \sqrt{\left(\frac{\delta q}{\delta x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\delta q}{\delta y}\delta y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta q}{\delta w}\delta w\right)^2} \qquad (4)$$

In ogni caso, l’**errore *δq*** non è mai più grande della somma ordinaria di tutti gli errori:

$$\delta q \leq \left|\frac{\delta q}{\delta x}\right|\delta x + \left|\frac{\delta q}{\delta y}\right|\delta y + \ldots + \left|\frac{\delta q}{\delta w}\right|\delta w$$

Esempi:

- Supponiamo di aver misurato: θ = 20 ± 3 (gradi) e di voler determinare cosθ:

cos 20° = 0.94 (miglior stima)

$$\delta\left(\cos\theta\right) = \left|\frac{\boldsymbol{d}\cos\theta}{\boldsymbol{d}\theta}\right|\delta\theta = \left|\sin\theta\right|\delta\theta \quad \text{(in rad.)}$$

Il risultato finale:

$$\cos\theta = 0.94 \pm 0.02$$

Esempi:

- Supponiamo di voler calcolare l'errore della funzione:

$$q(x) = x^n$$

$$\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x = \left|nx^{n-1}\right|\delta x$$

Osserviamo, anche, che:

$$\frac{\delta q}{|q|} = \left|\frac{nx^{n-1}}{q}\right|\delta x = \left|\frac{nx^{n-1}}{x^n}\right|\delta x = |n|\frac{\delta x}{|x|}$$

Per esempio se $q(x) = \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\delta q}{|q|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta x}{|x|}$

Analisi statistica degli errori casuali

Errori casuali e sistematici

L'elevata sensibilità di uno strumento mette in luce la presenza di fluttuazioni nel valore misurato dovute all'azione combinata di tanti piccoli effetti che danno luogo ad un errore casuale.

$\Downarrow$

Le incertezze sperimentali che possono essere rivelate ripetendo le misure sono chiamate **errori "casuali" o "accidentali"** $\Rightarrow$ *Possibilità di trattamento statistico*

Una misura può essere affetta anche da errori sistematici che (se identificati) possono in linea di principio essere corretti. Tuttavia una volta applicata la correzione ai dati, rimane l'incertezza sulla correzione apportata**.**

$\Downarrow$

Errori sistematici: non possono essere trattati statisticamente

Esempi:

- Misura del periodo di rotazione del piatto di un giradischi.

➢ Possibile sorgente di errore **casuale**: tempo di reazione nel far partire il cronometro.

⇓

Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare il periodo di rotazione.

➢ Possibile sorgente di errore **sistematico**: cronometro scalibrato (ad es. marcia costantemente lento).

⇓

La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

- Misura di una lunghezza con un righello.

- Possibile sorgente di errore **casuale**: interpolazione tra due tacche della scala.

Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare la lettura.

- Possibile sorgente di errore **sistematico**: deformazione del righello.

- ✓ In generale le sorgenti di **errori casuali** sono:
  - piccoli errori di giudizio dell’osservatore;
  - problemi di definizione;
  - piccoli disturbi dell’apparato di misura (p.es. vibrazioni, rumore elettrico, interferenza EM);
  - parallasse (per 50% errore di tipo <u>sistematico</u>)
  - ecc.
- ✓ In generale le sorgenti di **errori sistematici** sono:
  - Errato o mancato azzeramento degli strumenti;
  - Perdita di calibrazione degli strumenti;
  - parallasse (per 50% errore di tipo <u>casuale</u>)
  - ecc.

Media e deviazione standard

Supponiamo di aver ottenuto i seguenti valori dalla misura di una grandezza : 71, 72, 73,72, 71

Si può dimostrare che la miglior stima, $\boldsymbol{x_{best}}$, di $\boldsymbol{x}$ è la media:

$$x_{best} = \overline{x} = \frac{71 + 72 + 73 + 72 + 71}{5} = 71.8$$

In generale, per N misure indipendenti della grandezza $\boldsymbol{x}$, la sua miglior stima, $\boldsymbol{x_{best}}$:

$$\boxed{x_{best} = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum x_i}{N} \qquad (5)}$$

Moda e mediana

Oltre alla media aritmetica, per un campione discreto si possono definire:

- **MODA** il valore (o i valori osservati) che si presenta(no) più frequentemente.
- **MEDIANA** il numero di osservazioni sopra (>) e sotto (<) la mediana sono uguali.

Esempio: set di misure= [1.5, 1.75, 2.0, 2.0, 2.05, 2.1, 2.25, 2.5]

media = 2.018

moda = 2.0 (ricorre 2 volte)

mediana = (2.0+2.05)/2 = 2.025

Residuo o deviazione

$$\boldsymbol{d_i = x_i - \bar{x}} \qquad (6)$$

Il **residuo** indica di quanto il valore $\boldsymbol{x_i}$ misurato differisce dalla media.

La **semidispersione** massima è definita come:

$$d_{\max} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Numero della prova, i	Valore Misurato, $\boldsymbol{x_i}$	Deviazione $\boldsymbol{d_i}$
1	71	-0.8
2	72	0.2
3	73	1.2
4	72	0.2
5	71	-0.8
	$\bar{x} = 71.8$	$\bar{d} = 0$

$$d_{\max} = \frac{73-71}{2} = 1$$

La somma di tutti i residui è nulla

Deviazione standard

o

deviazione quadratica media (RMS)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \qquad (7)$$

residui

varianza

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2 \qquad (8)$$

Si può dimostrare che una definizione più rigorosa di σ_x è la seguente:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \qquad (9)$$

Invece di N

✓ **Osservazione**: la differenza nei valori di σ_x è quasi sempre poco significativa per N >>1.

Numero della prova, i	Valore Misurato, x_i	Deviazione d_i	d_i^2
1	71	-0.8	0.64
2	72	0.2	0.04
3	73	1.2	1.44
4	72	0.2	0.04
5	71	-0.8	0.64
	$\bar{x} = 71.8$	$\bar{d} = 0$	$\sum d_i^2 = 2.80$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2.80}{5}} = 0.75$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2.80}{4}} = 0.84$$

Deviazione standard: incertezza in una singola misura

La deviazione standard può essere usata per calcolare l'incertezza in una singola misura. Infatti:

1) se supponiamo che i valori della grandezza *x* misurata sono distribuiti in modo normale;

2) ripetiamo la misura di *x* molte volte in più.

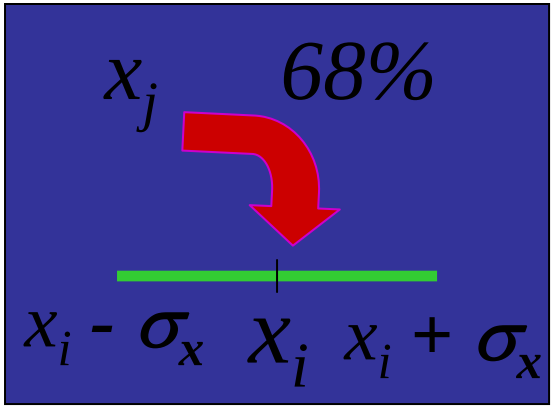
Avremo una probabilità pari a circa il **68 %** di misurare un valore x_i:

$$\boxed{x_i = \overline{x} \pm \sigma_x}$$

In pratica se N è molto grande, $\bar{x}$ sarà una stima “molto affidabile” del valore vero di x.

Un’altra singola misura di x (effettuata con lo stesso apparato sperimentale) fornirà un valore che avrà una probabilità di ~ 68 % di differire per meno di σ_x da $\bar{x}$.

$$\boxed{\delta x \equiv \sigma_x}$$



La deviazione standard può essere “presa” come l’incertezza nella misura.

Considerazioni sul significato della deviazione standard (σ)

Il significato della σ_x è duplice:

1. può essere preso come una stima dell'errore tipico (o errore medio) commesso nella singola misura degli *n* valori della grandezza *x*;

2. può essere assunto come l'errore commesso nella singola (ed unica) misura di una stessa grandezza (*x*) di un sistema fisico costituito da diversi elementi, ciascuno nominalmente identico agli altri e con le stesse caratteristiche (p. es. misura di k di molte molle simili).

Applicazione del concetto di deviazione standard

Supponiamo di voler determinare la costante elastica, ***k***, di 100 molle simili. Per determinare ***k*** e δ***k*** possiamo seguire due strade:

❶

1a) Metodo statico: carichiamo ciascuna molla con una massa e ne misuriamo l'allungamento, ripetendo la misura *n* volte;

1b) Metodo dinamico: carichiamo ciascuna molla con una massa e determiniamo il periodo di oscillazione, ripetendo la misura *n* volte;

Massa (kg)	Periodo T(sec)	$k = 4\pi^2 m/T^2$
.513	1.24	13.17
.581	1.33	12.97
.634	1.36	13.51
.691	1.44	13.14
.752	.150	13.18

$$\bar{k} = 13.19 \text{ N/m}$$

$$\sigma_{\bar{k}} = 0.196 \text{ N/m}$$

$$k_{best} = 13.2 \pm 0.2 \text{ N/m}$$

❷

2a) Eseguiamo molte misure su di una sola molla (p.es. 10 o 20)

⇓

Saremo in grado di stimare in modo corretto il valore di $\boldsymbol{k}$ per la prima molla (valor medio).

⇓

La $\sigma_{\boldsymbol{k}}$ delle misure eseguite ci fornisce una stima ragionevole dell'incertezza del metodo di misura di $\boldsymbol{k}$ (nella singola misura).

⇓

Ammesso che tutte le molle siano simili e che l'apparato sperimentale sia lo stesso possiamo aspettarci la stessa incertezza $\delta\boldsymbol{k}$.

❸

Supponendo che tutte le altre molle siano simili, per ogni altra potremo fare una sola misura con una incertezza δk:

$$\boxed{\delta k = \sigma_k}$$

Molla su cui abbiamo fatto n misure

(con il 68 % di probabilità)

La σ_k delle misure eseguite ci fornisce una stima ragionevole dell'incertezza del metodo di misura di k.

La deviazione standard della media

Supponiamo di aver misurato *N* valori, $x_1, \ldots. x_N$, della grandezza *x*.

La σ_x rappresenta l'incertezza media delle singole misure.

La miglior stima di *x*, x_{best}, è il suo valor medio:

$$\boxed{x_{best} = \bar{x}}$$

L'incertezza nel risultato finale, x_{best}, sarà la **deviazione standard dalla media**, $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}} \qquad (10)$$

(<u>errore standard</u> oppure <u>errore standard dalla media</u>)

Osservazioni:

La $\sigma_{\overline{x}}$ diminuisce lentamente all'aumentare di *N*.

$$\Downarrow$$

Ciò è consistente con l'aumento del grado di affidabilità di una misura. Per aumentare la precisione di una misura si potrebbe aumentare di molto **N**.

$$\Downarrow$$

Ma l'aumento di ***N*** non riduce gli *errori sistematici* !

Quindi per aumentare la precisione di una misura è necessario migliorare il metodo di misura e/o l'apparato sperimentale.

Errori sistematici

In generale, gli errori sistematici sono o vengono considerati trascurabili. Ciò non è sempre vero.

In ogni caso le sole misure non saranno in grado di evidenziarli.

Quindi, la $\sigma_{\bar{x}}$ può essere considerata come la componente casuale, $\delta x_{casuale}$, dell'incertezza totale, δx, della misura.

$$\delta x = \sqrt{\delta x^2{}_{casuale} + \delta x^2{}_{sistematica}} \quad ?$$

Non è possibile dare una giustificazione rigorosa

Gli **errori sistematici** devono essere:

❶ individuati e ridotti:

❷ minori dell'accuratezza richiesta nella misura.

Come si determina $\delta x_{sistematica}$?

❶ Eseguendo la misura con un altro strumento più accurato e confrontando i valori misurati (non è sempre possibile farlo !).

❷ In mancanza di specifiche tecniche sugli strumenti usati in laboratorio si assume che abbiano una definita incertezza sistematica (qualche %).

❸ Nei calcoli si useranno le regole solite sulla propagazione degli errori.

Per esempio, nel caso della misura di *k*, utilizzando la relazione:

$$\boldsymbol{k} = 4\pi^2 \boldsymbol{m} / \boldsymbol{T}^2$$

assumeremo che la bilancia (***m***) ed il cronometro (***T***) siano affetti da errori sistematici dell'1% e dello 0.5%, rispettivamente.

Poiché gli errori in ***m*** e ***T*** sono indipendenti, è ragionevole usare la somma in quadratura:

$$\frac{\delta \boldsymbol{k}_{sistematica}}{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\left(\frac{\delta \boldsymbol{m}_{sistematica}}{\boldsymbol{m}}\right)^2 + \left(2\frac{\delta \boldsymbol{T}_{sistematica}}{\boldsymbol{T}}\right)^2} = \sqrt{1+1}\% = 1.4\%$$

Quindi, l'incertezza nel valore finale sarà ottenuto combinando in quadratura i due tipi di errori:

$$\boxed{\delta \boldsymbol{k} = \sqrt{\left(\delta \boldsymbol{k}_{casuale}\right)^2 + \left(\delta \boldsymbol{k}_{sistematica}\right)^2}}$$

$$\bar{k} = 13.19 \text{ N/m}$$

$$\sigma_{\bar{k}} = 0.196 \text{ N/m} \qquad \sigma_{sist} = 0.014 \times k = 0.185 \text{ N/m}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_{\bar{k}}{}^2 + \sigma_{sist}} = 0.2695$$

$$k_{best} = 13.2 \pm 0.3 \text{ N/m}$$

In conclusione, si può affermare che:

❶ non è possibile ridurre in modo indefinito gli errori aumentandone il numero delle misure. Infatti se:

$$\delta x_{casuale} \rightarrow 0 \quad \text{allora} \quad \delta x \rightarrow \delta x_{sistematico}$$

❷ per migliorare la precisione della misura è necessario modificare la tecnica di misura e/o migliorare l'accuratezza della strumentazione usata.

Distribuzioni e istogrammi

Premesso che per una adeguata analisi statistica sono necessarie molte misure.

⬇

Come possiamo organizzare e adeguatamente rappresentare i dati sperimentali ?

➊ Se si hanno pochi dati, un possibile modo per rappresentare i dati potrebbe essere l'uso delle tabelle

Numero della prova, i	Valore Misurato, x_i	Deviazione d_i	d_i^2
1	71	-0.8	0.64
2	72	0.2	0.04
3	73	1.2	1.44
4	72	0.2	0.04
5	71	-0.8	0.64
	$\bar{x} = 71.8$	$\bar{d} = 0$	$\sum d_i^2 = 2.80$

❷ Un altro modo potrebbe essere quello di riportare in una tabella i valori misurati e le volte in cui essi si sono presentati nelle misure.

es: supponiamo di aver misurato i seguenti valori per una grandezza:

26, 24, 26, 28, 23, 24, 25, 24, 26, 25

Possiamo ordinarli ad es. in modo crescente:

23, 24, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 26, 28

e riportarli nella seguente tabella:

Valori misurati, x_k	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
Numero di volte, n_k	**1**	**3**	**2**	**3**	**0**	**1**

Ricordando la definizione (5), la media si può riscrivere come:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_k n_k x_k}{N}$$

Somma pesata

n_k peso di ciascun valore x_k. Per definizione: $$\sum_k n_k = N \qquad (20)$$

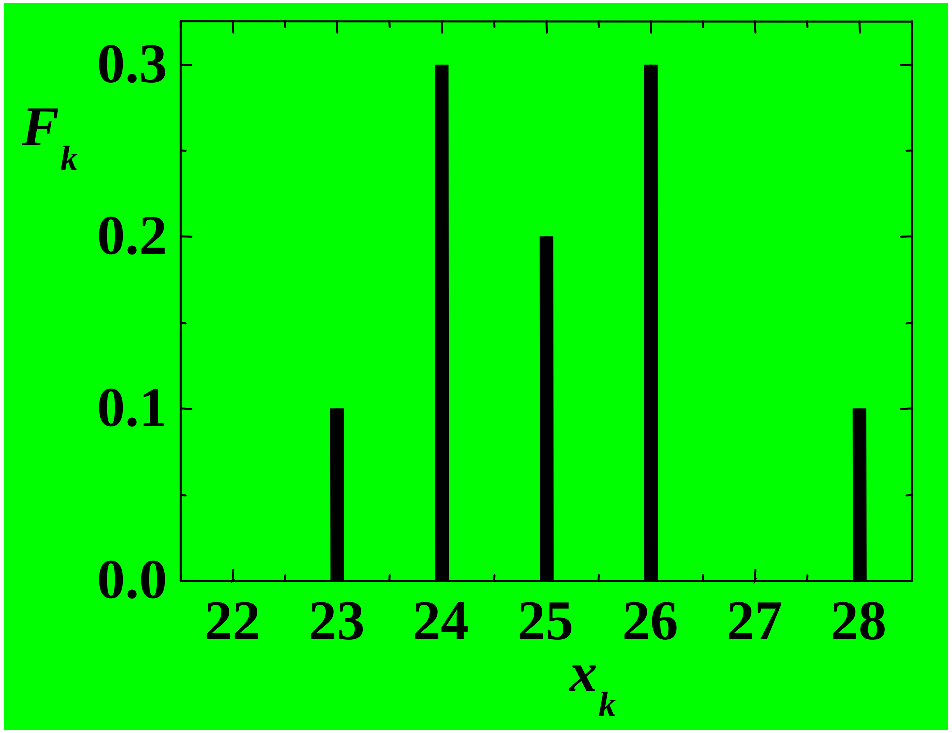
La frazione, F_k, delle n_k misure in cui si è ottenuto il valore x_k, è:

$$F_k = \frac{n_k}{N} \quad \Longrightarrow \quad \sum_k F_k = 1$$ **(condizione di normalizzazione)**

Le F_k specificano la **distribuzione** dei valori ottenuti fra i diversi pesi possibili.

$$\overline{x} = \sum_k x_k F_k$$

❸ Possiamo rappresentare graficamente la distribuzione delle misure ottenute con un **istogramma a barre**.



Questo tipo di istogramma è utile se i dati da rappresentare sono dei numeri interi (p. es. voti di esami).

In generale i dati da rappresentare possono assumere valori continui:

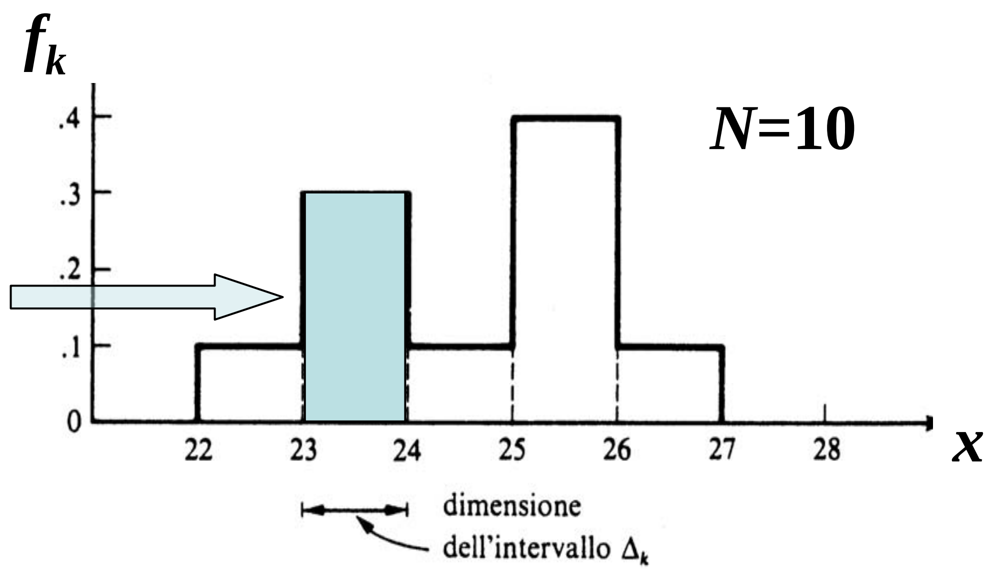
26.4, **23.9**, **25.1**, **24.6**, **22.7**, **23.8**, **25.1**, **23.9**, **25.3**, **25.4**

In questo caso è conveniente dividere i valori in intervalli, il cui numero ed ampiezza dovrà essere opportunamente scelto.

Intervallo	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27	27-28
Eventi per intervallo	1	3	1	4	1	0

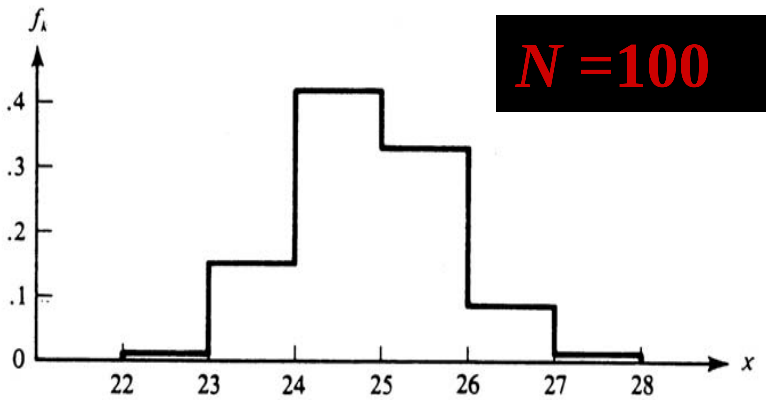
I dati possono essere rappresentati in un **istogramma a intervalli**.

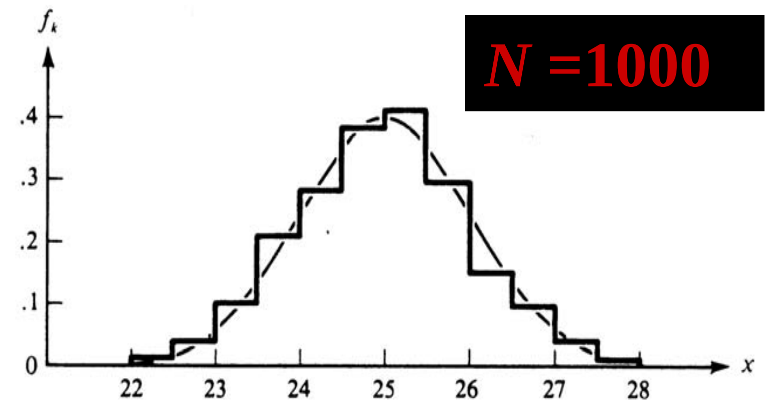
$f_k \Delta_k$ ($\equiv$ F_k) fraz. di misure nell'intervallo k-esimo



Distribuzione limite

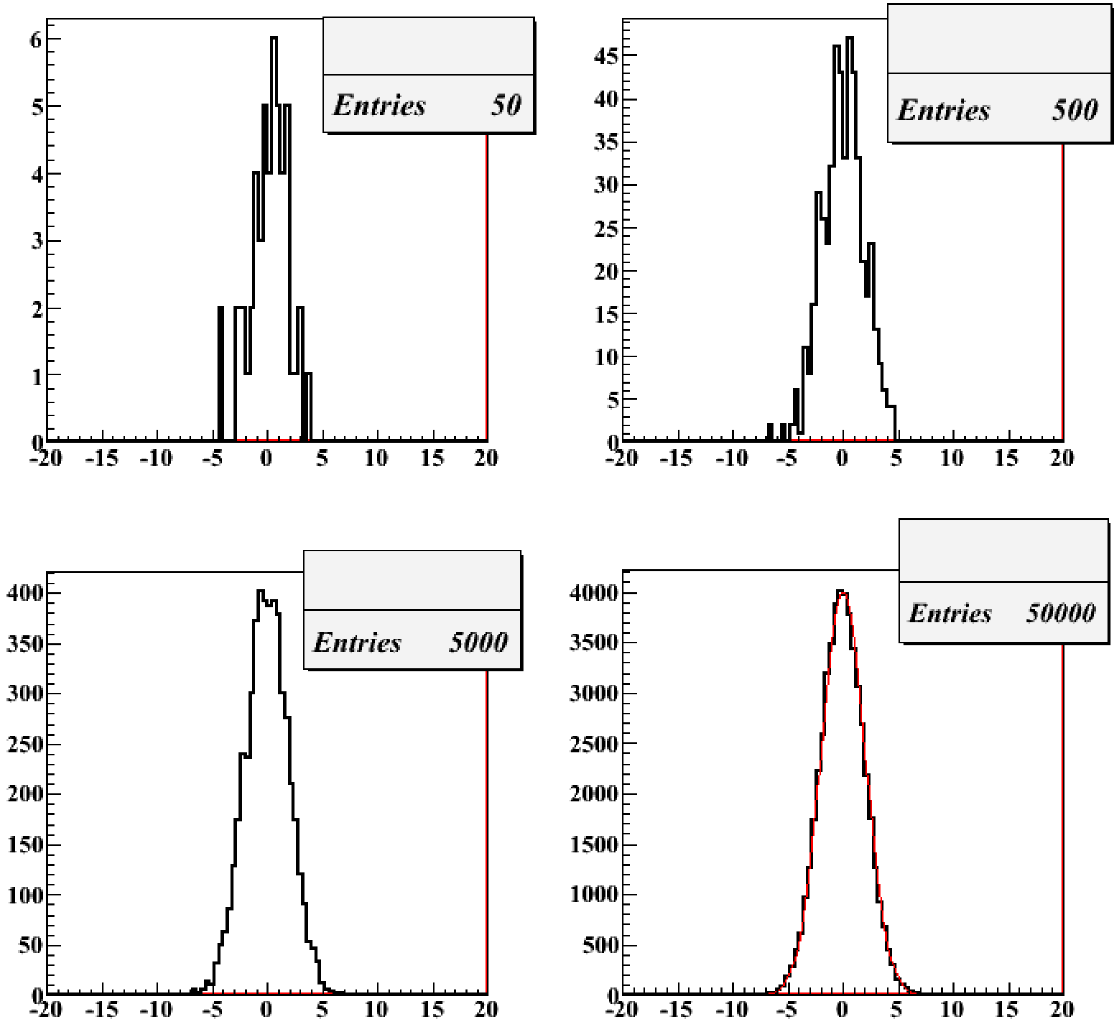
Aumentando il numero dei dati gli istogrammi cominciano ad assumere una forma definita, più regolare e liscia.





Se $N \to \infty$ l'istogramma tende ad una curva continua detta detta **distribuzione limite** (curva sul graf. di destra).

- La **distribuzione limite** è una costruzione teorica.
- Tutte le misure tendono ad una distribuzione limite, all'aumentare del numero delle misure.



Assunto che tutte le misure tendano ad una distribuzione limite, questa può essere definita dalla funzione $f(x)$ avente le seguenti proprietà:

- $f(x)dx$ = frazione di misure (**probabilità**) che cadono tra x e $x+dx$.
- La frazione delle misure (**probabilità**) che cadono tra $x = a$ e $x = b$ sarà:

$$P_{ab} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Condizione di normalizzazione (probabilità di ottenere un qualunque valore compreso tra $x = -\infty$ e $x = +\infty$):

$$P_{-\infty,+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

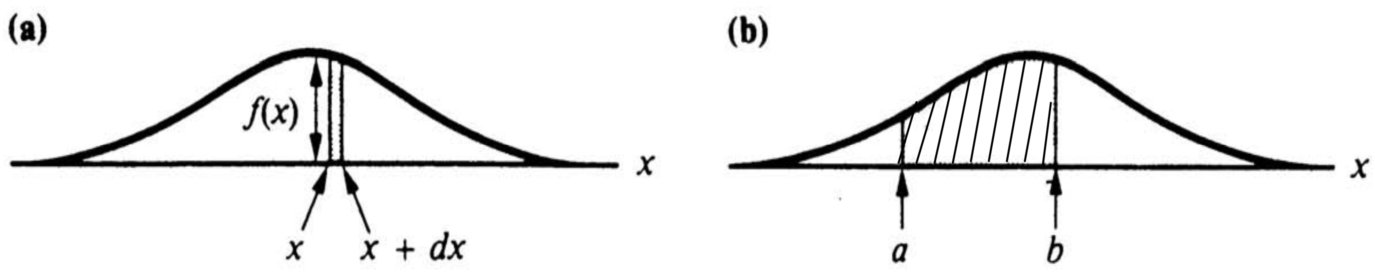


Figura 5.5. *Una distribuzione limite* f(x). *(a) Dopo molte misure la frazione che cade fra* x *e* x + dx *è l'area* f(x)dx *della stretta striscia. (b) La frazione che cade fra* x = a *e* x = b *è l'area ombreggiata.*

Osservazione:

gli estremi di integrazione (da $-\infty$ a $+\infty$) sono stati così definiti per una comodità di rappresentazione e non si riferiscono ad una situazione realmente riscontrabile in una misura.

❶ Tutte le misure reali cadranno in un intervallo di ampiezza finita.

❷ Se la misura è precisa i valori cadranno in un intorno piccolo attorno al valore vero (distribuzione stretta).

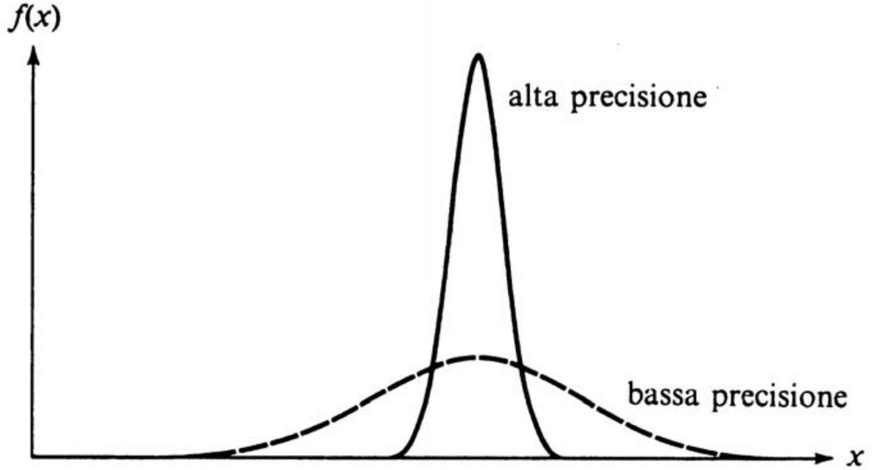


Figura 5.6. *Due distribuzioni limite, una per una misura ad alta precisione, l'altra per una misura a bassa precisione.*

La distribuzione limite $f(x)$ per la misura di una grandezza fisica con un dato apparato sperimentale, se fosse conosciuta, consentirebbe di calcolare subito il valore medio, $\bar{x}$, atteso della grandezza:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x$$

Questa relazione può essere considerata una generalizzazione della relazione già vista:

$$\bar{x} = \sum_k x_k F_k = \sum_k x_k f_k \Delta_k$$

Analogamente, per il calcolo della deviazione standard, definita come:

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)\, \mathrm{d}x}$$

La distribuzione normale o di Gauss

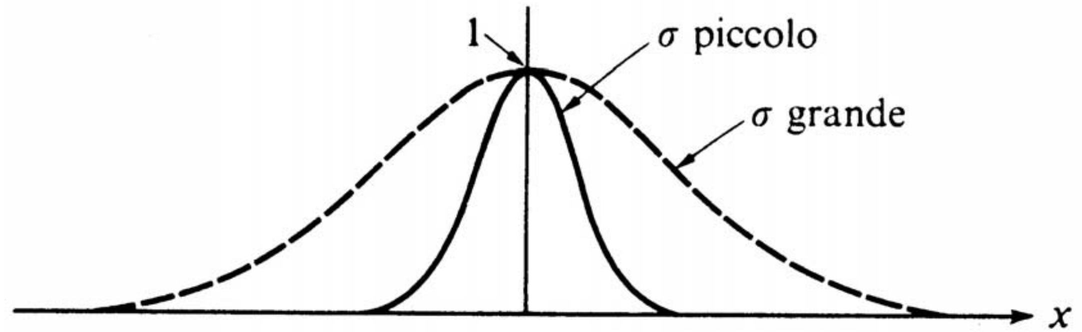
- Sebbene tutte le misure tendano ad una distribuzione limite non tutte le distribuzioni sono di forma simmetrica.

- Si può dimostrare che in presenza di errori casuali piccoli (errori sistematici trascurabili) la distribuzione (detta di **Gauss** o **normale**) assume una forma a campana, simmetrica centrata intorno al valore **vero** della grandezza.

- Non essendo possibile dimostrare l'esistenza del valore vero di una grandezza assumeremo che questo esista.

La distribuzione di Gauss ha la seguente forma analitica:

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-X)^2/2\sigma^2\right]$$



X

Proprietà

- La curva è simmetrica attorno ad x = X
- *è normalizzata* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
- σ è un parametro che definisce la larghezza della distribuzione.

Le misure i cui valori sperimentali assumono una distribuzione limite di tipo gaussiano si dicono <u>distribuite normalmente</u>.

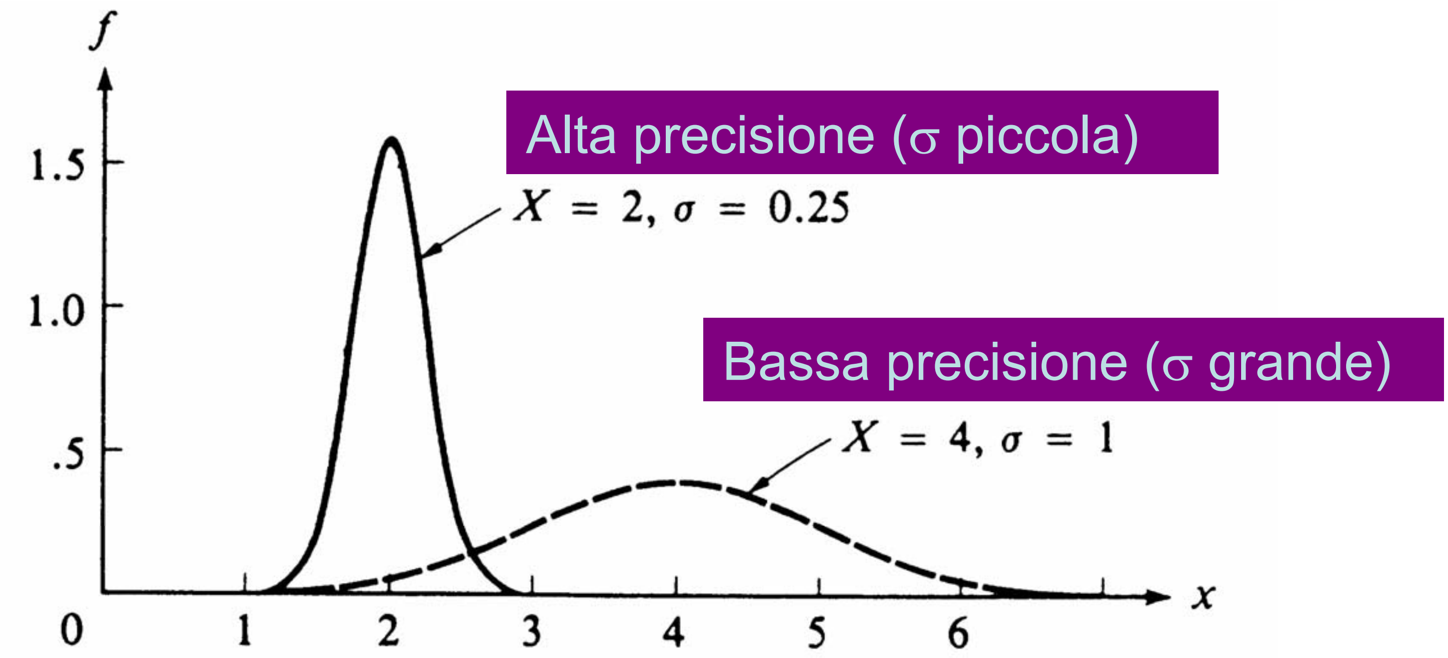


Figura 5.10. *Due distribuzioni normali, o di Gauss.*

La conoscenza della distribuzione limite per una misura, consente di calcolare il valore medio e la deviazione standard attesi dopo molte acquisizioni:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} \boldsymbol{G}_{X,\sigma}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} \exp\left[-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X})^2 / 2\sigma^2\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{x}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})^2 \boldsymbol{G}_{X,\sigma}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \sigma$$

Si può dimostrare che:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= X \\ \sigma_x &= \sigma \end{aligned}}$$

- Se le misure (in numero infinito) sono distribuite in modo normale (solo errori casuali) il loro valore medio è il valore vero della grandezza su cui la funzione di Gauss è centrata.

- Quindi, dopo un numero infinito di misure:
  - la media di x, coinciderà con il valore vero *X*;
  - il parametro di larghezza, σ, della distribuzione coinciderà con la deviazione standard, σ_x.

- In pratica, poiché il numero delle misure è <u>sempre finito</u>:

$$\bar{x} \to X$$

$$\sigma_x \to \sigma$$

Si può dimostrare che dati $\boldsymbol{N}$ valori misurati $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots x_N}$, affetti da errore casuale (cioè distribuiti Normalmente) le migliori stime di X e σ (che non sono noti) sono la media e la RMS.

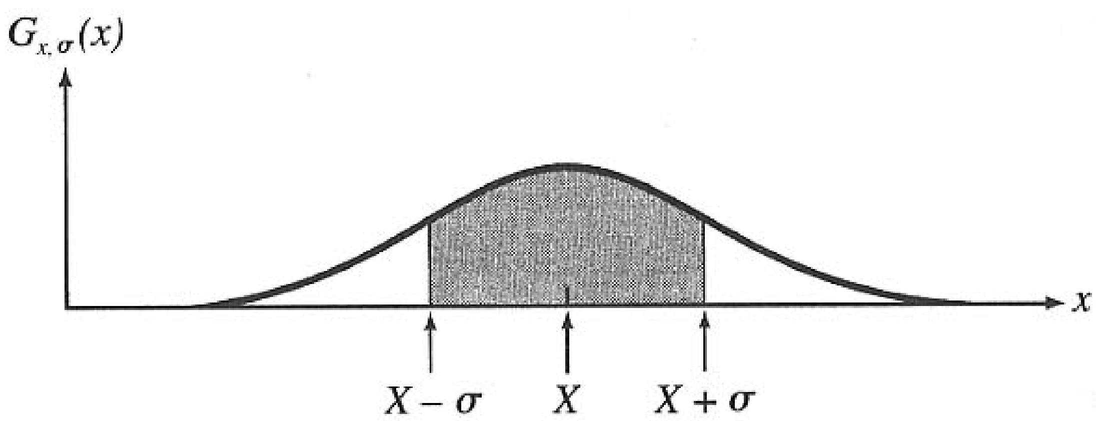
$$\boxed{(\text{miglior stima di } \boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{i}^{N} \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{N}} \equiv \overline{\boldsymbol{x}}}$$

$$\boxed{(\text{miglior stima di } \sigma) = \sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{N}-1} \sum_{i}^{N} \left(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}}\right)^2}}$$

Deviazione standard come limite di confidenza del 68%

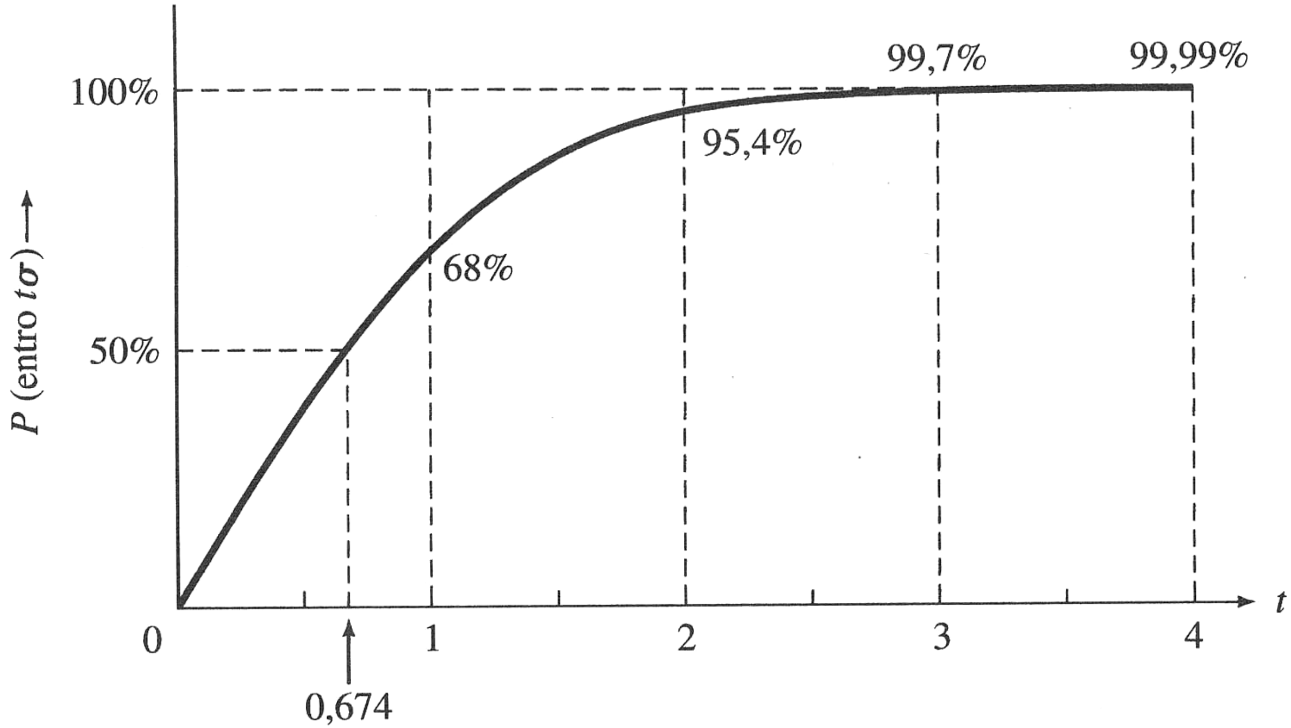
Se $G_{X,\sigma}(x)$ è la distribuzione limite di Gauss, possiamo calcolare la probabilità che un valore x cada in un certo intervallo di ampiezza pari a σ e sia centrato intorno al valore vero X:

$$P(\text{entro } \sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G_{X,\sigma}(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} \exp\left[-(x-X)^2/2\sigma^2\right] dx$$



La probabilità di avere
$X - \sigma \leq x \leq X + \sigma$
è
P(entro σ) = 68%

Integrale normale degli errori



t	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
P (%)	0	20	38	55	68	79	87	92	95,4	98,8	99,7	99,95	99,99

Figura 5.13. La probabilità P(entro $t\sigma$) che una misura di x cada entro t deviazioni standard dal valore vero $x = X$. Due nomi comuni per questa funzione sono l'*integrale normale degli errori* e la *funzione degli errori*, erf(t).

Accettabilità di una misura

Cerchiamo di dare una risposta a due domande:

❶ Cosa significa essere ragionevolmente confidenti che una grandezza misurata sia compresa in $\boldsymbol{x_{best} \pm \delta x}$?

❷ Come possiamo decidere se l'accordo tra $\boldsymbol{x_{best}}$ ed $\boldsymbol{x_{exp}}$ è accettabile ?

Risposte:

❶ Se misuriamo ***x*** molte volte, la stima migliore di ***x*** è:

$$(\text{valore di } \boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{x}} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

con un intervallo di confidenza del 68%.

In alternativa si potrebbe scegliere:

$$(\text{valore di } \boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{x}} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$$

con un intervallo di confidenza del 95%.

In generale, il punto essenziale nello stabilire ogni valore misurato è determinare un intervallo (o incertezza) ed il relativo livello di confidenza.

È prassi comune riportare come incertezza il valore di una deviazione standard.

❷ Consideriamo la discrepanza :

$$\left| x_{\mathrm{best}} - x_{\mathrm{exp}} \right|$$

Quando possiamo dire che questa è soddisfacente ?

$$\left| x_{\mathrm{best}} - x_{\mathrm{exp}} \right| \leq \sigma_x \quad \textbf{non significativa}$$

$$\left| x_{\mathrm{best}} - x_{\mathrm{exp}} \right| > \sigma_x \quad \textbf{significativa}$$

⬇

È possibile quantificare questa discrepanza ?

Possiamo rispondere alla domanda precedente se assumiamo che i nostri dati siano distribuiti normalmente e facciamo 2 ulteriori ipotesi:

❶ la distribuzione è centrata su $\boldsymbol{x}_{exp}$;

❷ il parametro di larghezza della distribuzione è uguale alla stima σ dello sperimentatore.

$$\Downarrow$$

❶ È vera se gli errori sistematici sono stati ridotti ad un livello trascurabile;

❷ È un'approssimazione ragionevole se sono state fatte molte misure.

Valutazione quantitativa

Consideriamo la quantità $\boldsymbol{t}$ così definita:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\left|\boldsymbol{x}_{\text{best}} - \boldsymbol{x}_{\text{exp}}\right|}{\sigma}$$

dove σ è la dev. standard ($\sigma_{\boldsymbol{x}}$) per $\boldsymbol{x}_{\text{best}}$ (singola misura) opp. la dev. standard della media ($\sigma_{\overline{x}}$) se $\boldsymbol{x}_{\text{best}}$ è la media di molte acquisizioni.

Utilizzando l'integrale normale degli errori si può calcolare la probabilità che un certo risultato differisca da $\boldsymbol{x}_{\text{exp}}$ per $\boldsymbol{t}$ (o più) deviazioni standard.

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\text{al di fuori di } \boldsymbol{t\sigma}) = 100\% - \boldsymbol{P}(\text{entro } \boldsymbol{t\sigma})}$$

Tabella A. La probabilità percentuale, $P(\text{entro } t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx$, come funzione di t.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.75	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34
2.0	95.45	95.56	95.66	95.76	95.86	95.96	96.06	96.15	96.25	96.34
2.1	96.43	96.51	96.60	96.68	96.76	96.84	96.92	97.00	97.07	97.15
2.2	97.22	97.29	97.36	97.43	97.49	97.56	97.62	97.68	97.74	97.80
2.3	97.86	97.91	97.97	98.02	98.07	98.12	98.17	98.22	98.27	98.32
2.4	98.36	98.40	98.45	98.49	98.53	98.57	98.61	98.65	98.69	98.72
2.5	98.76	98.79	98.83	98.86	98.89	98.92	98.95	98.98	99.01	99.04
2.6	99.07	99.09	99.12	99.15	99.17	99.20	99.22	99.24	99.26	99.29
2.7	99.31	99.33	99.35	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.46	99.47
2.8	99.49	99.50	99.52	99.53	99.55	99.56	99.58	99.59	99.60	99.61
2.9	99.63	99.64	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72
3.0	99.73									
3.5	99.95									
4.0	99.994									
4.5	99.9993									
5.0	99.99994									

$\boldsymbol{P}(\text{al di fuori di } \boldsymbol{t\sigma}) = 100\% - \boldsymbol{P}(\text{entro } \boldsymbol{t\sigma})$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.0
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.
1.0	68.27	68.75	69.23	69.70	70.17	70.
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.

Se questa probabilità è grande, allora la discrepanza non è significativa ed il risultato $\boldsymbol{x}_{\text{best}}$ è accettabile. Nel caso contrario (probabilità molto piccola) la discrepanza è significativa ($\boldsymbol{x}_{\text{best}}$ è inaccettabile) e quindi andranno riviste le procedure sperimentali, i calcoli, la stima degli errori, ecc.

P. es. se consideriamo la discrepanza:

$$\left| \boldsymbol{x}_{\text{best}} - \boldsymbol{x}_{\text{exp}} \right| = \sigma_{\boldsymbol{x}}$$

P(al di fuori di σ) = 32%

(discrepanza del tutto probabile)

$$\left| x_{\text{best}} - x_{\text{exp}} \right| = 3\sigma_x$$

P(al di fuori di **3**σ) = 0.3%

(discrepanza piuttosto improbabile)

Qual è il limite tra accettabilità ed inaccettabilità di una misura ?

Non è possibile definire in modo univoco questo limite. Dipende dal livello al di sotto del quale giudichiamo che una discrepanza sia irragionevolmente improbabile.

In generale, se la discrepanza è:

- < 2σ (p.es. 1.8σ) il risultato è considerato ancora accettabile.
- > 2.5σ il risultato è considerato inaccettabile.
- compresa tra 1.8σ e 2.5σ l'esperimento non è conclusivo.

Esempio:

Tre sperimentatori misurano il periodo di oscillazione di un pendolo molte volte ottenendo i seguenti valori:

$T_1 = (2.9 \pm 0.4)$ s $\qquad T_2 = (3.2 \pm 0.2)$ s $\qquad T_3 = (1.8 \pm 0.4)$ s

Discutere se le 3 misure sono accettabili o meno se il valore teorico atteso è T= 3.0 s.

Soluzione

$$|T_1 - T| = |2.9 - 3| = 0.1 = 0.25\,\sigma_x$$

P(al di fuori di 0.25 σ_x) = 100% - ***P***(entro 0.25 σ_x) = 80% **ACCETTABILE**

$$|T_2 - T| = |3.2 - 3| = 0.2 = 1\sigma_x$$

P(al di fuori di 1 σ_x) = 100% - ***P***(entro 1 σ_x) = 32% **ACCETTABILE**

$$|T_3 - T| = |1.8 - 3| = 1.2 = 3\sigma_x$$

P(al di fuori di 3 σ_x) = 100% - ***P***(entro 3 σ_x) = 0.3% **NON ACCETTABILE**

Media Pesata

Supponiamo che una stessa grandezza sia stata misurata da osservatori differenti (p.es. velocità della luce) in laboratori con strumenti e metodi di misura differenti:

Laboratorio A: $c = c_A \pm \sigma_A$

Laboratorio B: $c = c_B \pm \sigma_B$

Come si possono combinare questi dati per ottenere la miglior stima di *c* ?

<u>Osservazioni:</u>

- Dobbiamo supporre che le 2 misure siano consistenti, cioè la discrepanza: $|c_A - c_B| < \sigma_A (\text{e di } \sigma_B)$

- É evidente che se le misure hanno un diverso valore di σ non è conveniente fare la semplice media dei valori medi ottenuti.

Si può dimostrare che la migliore stima è data dalla media pesata

$$\boxed{(\text{miglior stima di } \boldsymbol{X}) = \left(\frac{\boldsymbol{x_A}}{\sigma_{\boldsymbol{A}}^2} + \frac{\boldsymbol{x_B}}{\sigma_{\boldsymbol{B}}^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_{\boldsymbol{A}}^2} + \frac{1}{\sigma_{\boldsymbol{B}}^2}\right)}$$

Se definiamo i pesi: $\boldsymbol{w_A} = \dfrac{1}{\sigma_{\boldsymbol{A}}^2}$ e $\boldsymbol{w_B} = \dfrac{1}{\sigma_{\boldsymbol{B}}^2}$

Possiamo riscrivere il risultato sulla migliore stima di *X*:

$$\boxed{(\text{miglior stima di } \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x_{pesato}} = \frac{\boldsymbol{x_A w_A} + \boldsymbol{x_B w_B}}{\boldsymbol{w_A} + \boldsymbol{w_B}}}$$

Note

- Nella media pesata il valore ottenuto con un errore più piccolo avrà un peso maggiore: p. es. se $\sigma_A < \sigma_B$ allora $w_A > w_B$
- Nel caso in cui le due misure siano affette dallo stesso errore ($\sigma_A = \sigma_B$):

$$\boldsymbol{x_{pesato}} = \left(\boldsymbol{x_A} + \boldsymbol{x_B}\right)/2$$

Generalizzando il risultato al caso in cui sia abbiano più misure distinte di una stessa grandezza *x*:

$$\boldsymbol{x_1 \pm \sigma_1,\ x_2 \pm \sigma_2,\ \ldots\ldots\ x_N \pm \sigma_N}$$

$$x_{pesato} = \frac{\sum_1^N x_i w_i}{\sum_1^N w_i} \quad \text{dove} \quad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \ \text{per } i = 1....N$$

L'incertezza nel risultato finale (x_{pesato}):

$$\sigma_{pesato} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^N w_i}}$$

Il risultato precedente significa che l'errore in x_{pesato} (ossia il peso totale nel risultato finale) è proporzionale alla somma di tutti i singoli pesi.

Esempio:

Tre sperimentatori misurano il periodo di oscillazione di un pendolo molte volte, ottenendo i seguenti valori:

$T_1 = (2.9 \pm 0.4)$ s $T_2 = (3.2 \pm 0.2)$ s $T_3 = (3.4 \pm 0.3)$ s

Dati questi 3 risultati qual è la migliore stima di T?

Soluzione

Calcoliamo i 3 pesi, definiti come $w_i = 1/\sigma_i^2$:

$w_1 = 1/(0.4)^2 = 6.25$ $w_2 = 1/(0.2)^2 = 25$ $w_3 = 1/(0.3)^2 = 11.11$

La stima migliore di T è:

$$T_{best} = \frac{\sum_{i=1}^{3} w_i T_i}{\sum_{i=1}^{3} w_i} = \frac{6.25\times 2.9 + 25\times 3.2 + 11.11\times 3.4}{6.25 + 25 + 11.11} = \frac{135.9}{42.36} = 3.2082$$

con incertezza: $$\sigma_{best} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} w_i}} = \frac{1}{\sqrt{42.36}} = 0.1536 \longrightarrow$$ **T=(3.21±0.15) s**

Grafici lineari: stima grafica dei parametri della retta

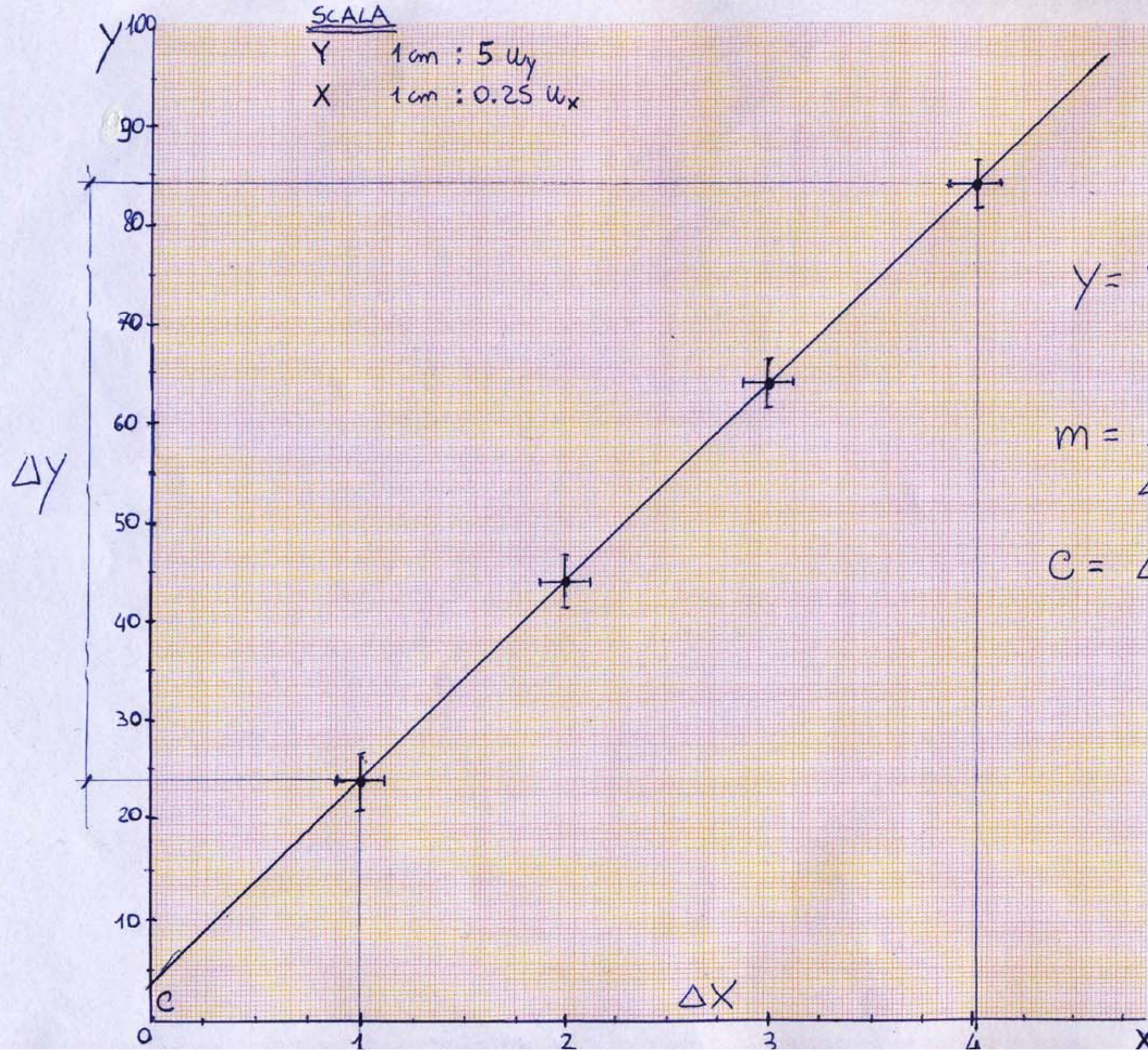
Supponiamo di avere misurato due grandezze x e y, e di voler verificare se sono legate da una dipendenza lineare cioè se vale la relazione: **$y = mx + c$**, dove **m** e **c** sono rispettivamente il *coefficiente angolare* (o *pendenza*) e l'*intercetta* della retta.

X (u_x) ± 0.125	**Y** (u_y) ± 2.5
1	24
2	44
3	64
4	84

1. Disegnare i punti su carta millimetrata:
   - Scegliere per ciascuna grandezza una scala appropriata es: $1\ \text{cm} \equiv 5\ u_y$ $\quad 1\ \text{cm} \equiv 0.25\ u_x$
   - riportare i punti con la barra di errore in x e y

2. In generale i punti sperimentali non giacciono tutti sulla retta a causa degli inevitabili errori di misura; la migliore stima della retta *vera* è quella che “passa meglio” per i punti.

3. Tracciata la migliore retta, **c** è dato dall’intersezione della retta con l’asse y, mentre la pendenza **m** si ricava graficamente come mostrato in figura.



$$y = mx + c$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{60}{3} = 20$$

$$c = 4$$

4. Gli errori su c e m, si possono stimare assumendo un'incertezza di 1 mm sulle lunghezze misurate (c, ΔY, ΔX) e , per mezzo della scala del grafico, convertendo questa incertezza in unità di misura di x e y

$1\ \text{mm} \equiv 0.5\ u_y \;\Rightarrow\; c = (4.0 \pm 0.5)\ u_y \qquad \Delta Y = (60.0 \pm 0.5)\ u_y$

$1\ \text{mm} \equiv 0.025\ u_x \;\Rightarrow\; \Delta X = (3.000 \pm 0.025)\ u_y$

$m = \Delta Y / \Delta X = 60.0/3 = 20$

Propagando gli errori si valuta l'incertezza su m:

$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{\left(\frac{0.5}{60.0}\right)^2 + \left(\frac{0.025}{3.000}\right)^2} = 0.0117$$

Quindi la stima della pendenza è: **m = (20.00±0.012)**