Fluidi

Definizione di fluido
Pressione e unità di misura
Idrostatica
- Legge di Stevino
- Strumenti di misura di pressione
- Principio di Pascal
- Principio di Archimede

Idrodinamica
- Fluidi ideali vs. reali
- Equazione di continuità
- Equazione di Bernoulli
- Moto laminare e turbolento
- Equazione di Poiseuille
- Il sistema circolatorio

Moto di corpi in un fluido reale
Sedimentazione e centrifugazione

Definizioni

Stati della materia:

- solido [volume e forma definiti]
- liquido [volume definito, forma no]
- gassoso [né volume, né forma definiti]

N.B. Sono definizioni artificiose: lo stato di una sostanza può cambiare con temperatura e pressione

Un fluido è un mezzo continuo senza forma propria: assume la forma del recipiente che la contiene.
In un **fluido**, le molecole sono sistemate casualmente legate da deboli forze di coesione e forze esercitate da pareti del contenitore.
Liquidi e gas sono fluidi

Differenze fra un fluido e un solido:

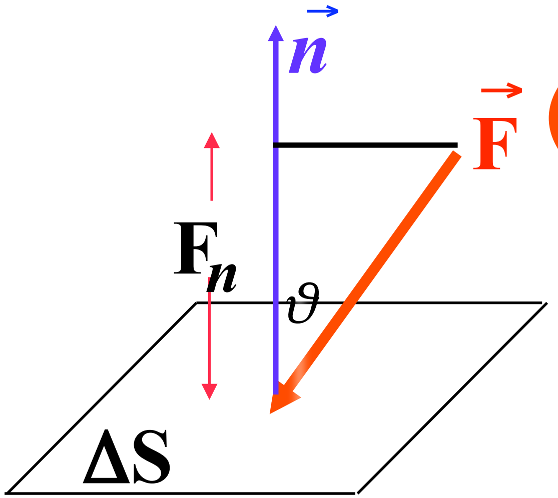
- le molecole di un fluido sono libere di muoversi; in un solido sono legate a formare il reticolo cristallino.
- la compressibilità. Una pressione Δp esercitata su un fluido produce una variazione di volume ΔV . Su un solido NO. Per i liquidi ΔV è piccolo, per i gas è grande.

Pressione

$$\text{pressione} = \frac{\text{forza perpendicolare}}{\text{superficie}}$$

$P = F_n / \Delta S$

$Pa = N/m^2$



Non conta la forza in sè, ma la sua componente perpendicolare! ⇒ La pressione è uno scalare

SI	cgs	pratici
pascal	baria	atm, mmHg, bar

Sperimentalmente si dimostra che un fluido esercita una pressione in tutte le direzioni

Unità di misura di pressione

Pressione atmosferica

Torricelli: a livello del mare la pressione esercitata dall'aria equivale a quella di una colonna di mercurio alta 760 mm

Unità di misura pratiche di pressione:

1 atm = 760 mmHg   1 mmHg (torr) = (1/760) atm

Relazioni fra le differenti unità di misura

1 Pa = 1 N/m^2 = (10^5 dine)/(10^4 cm^2) = 10 dine/cm^2 = 10 barie

1 atm = 101325 Pa = 760 torr

1 bar = 10^3 mbar = 10^5 Pa   (usate in metereologia)

Es.

Pressione sanguigna (sempre in mmHg):

120 mmHg= (120/760) atm = 0.158 atm =

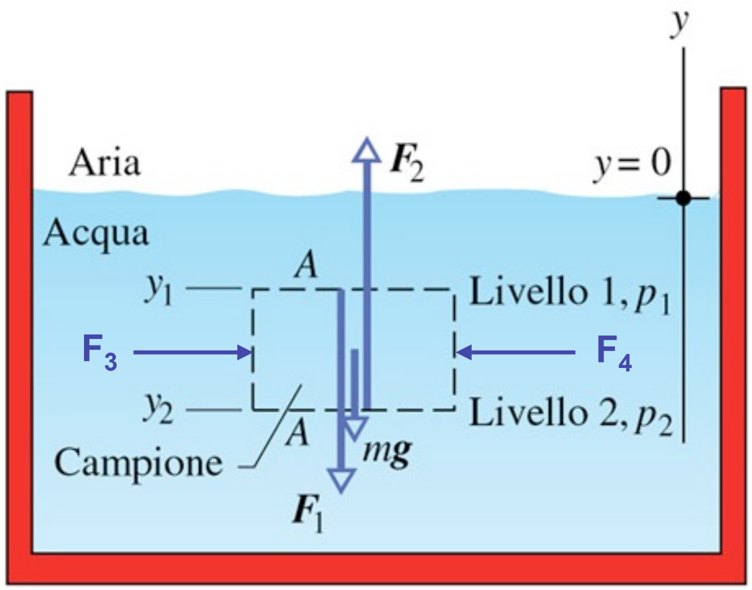
= 0.158 · 101325 Pa ≈ 16000 Pa = 160000 barie = 0.16 bar

Valori di pressione

Centro del Sole ………………………………	$2\ 10^{16}$ Pa
Centro della Terra…………………… …………	$4\ 10^{11}$ Pa
Massima pressione in laboratorio ……	$1.5\ 10^{10}$ Pa
Fossa oceanica (sul fondo) …………………	$1.1\ 10^{8}$ Pa
Tacchi a spillo …………………………………	$1\ 10^{6}$ Pa
Pneumatici auto……………………………… …	$2\ 10^{5}$ Pa
Pressione atmosferica a livello del mare ………	$1\ 10^{5}$ Pa
Pressione sanguigna…. ……………………. (in eccesso a quella atmosferica)	$1.6\ 10^{4}$ Pa
Massimo vuoto in laboratorio……………………	10^{-12} Pa

- L'area della punta di un ago ipodermico è molto piccola $\Rightarrow$F piccola produce P elevata $\Rightarrow$ ago penetra nella pelle
- Racchette da sci: distribuiscono il peso della persona su una superficie più grande di quella dei suoi piedi $\Rightarrow$ Pressione della forza peso diminuisce $\Rightarrow$ la persona non affonda nella neve

Legge di Stevino



Consideriamo le forze che agiscono su un campione di fluido di densità ρ (kg/m³) contenuto nel cilindro tratteggiato in figura.

F_1 F_2 F_3 F_4 sono originate dall'urto delle molecole di fluido sulla superficie esterna del cilindro.

Poiché il cilindro è fermo, la risultante delle forze agenti su di esso è nulla.

Nella direzione orizzontale $F_3 = F_4 \Rightarrow p_3 A = p_4 A \Rightarrow p_3 = p_4$

Nella direzione verticale (y)

$$F_2 = F_1 + mg \qquad F_{1,2} = p_{1,2} A \qquad m = \rho A h$$

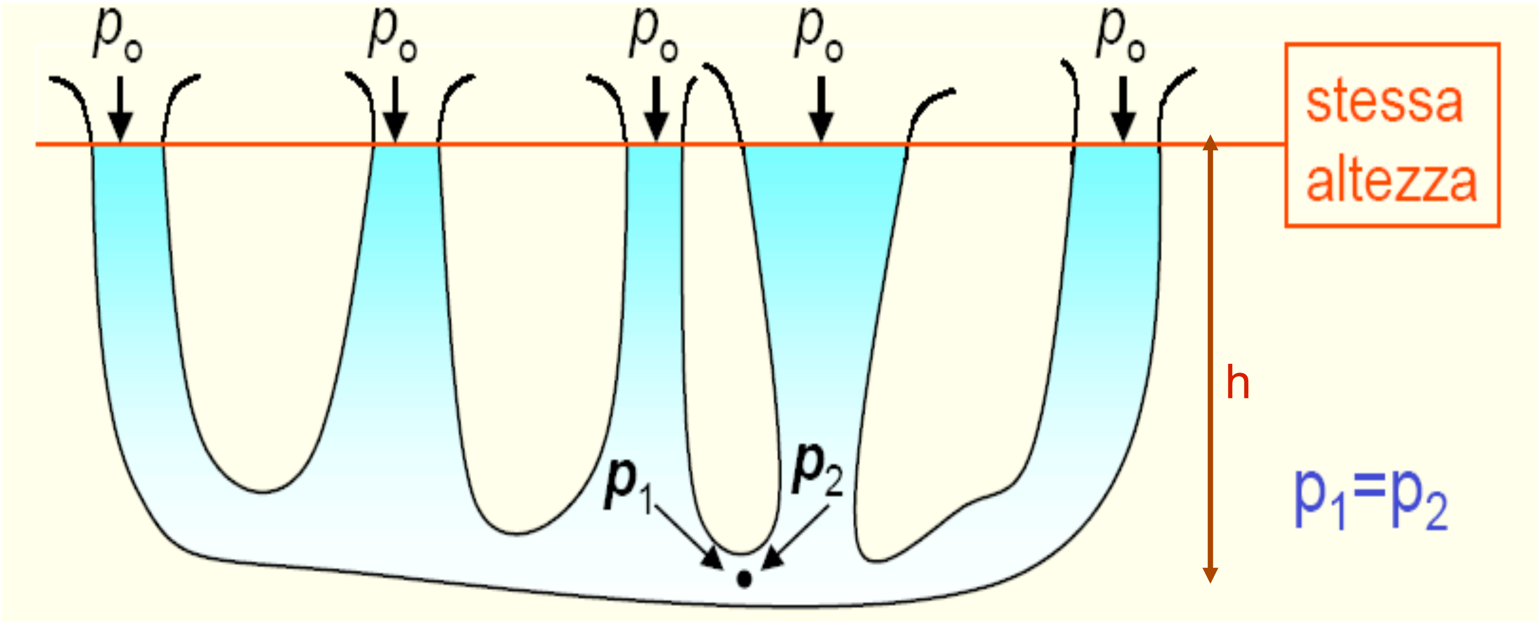
$$p_2 A = p_1 A + \rho\, A\, (y_1 - y_2)\, g$$

$$\boxed{p_2 = p_1 + \rho\, g\, (y_1 - y_2)}$$

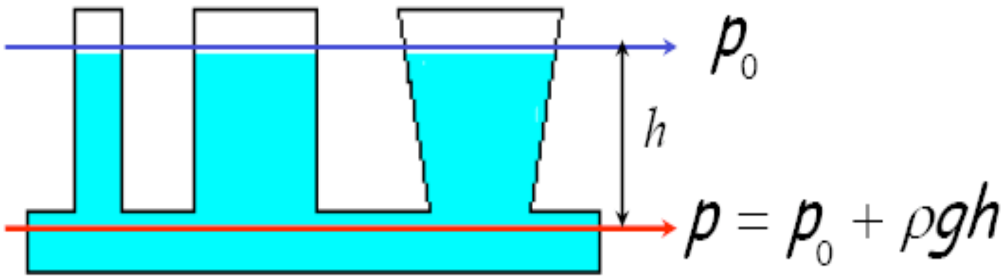
In un fluido in equilibrio statico, la pressione in un punto:

- dipende solo dalla profondità di quel punto
- NON dipende dalle dimensioni orizzontali
- NON dipende dalla forma del contenitore

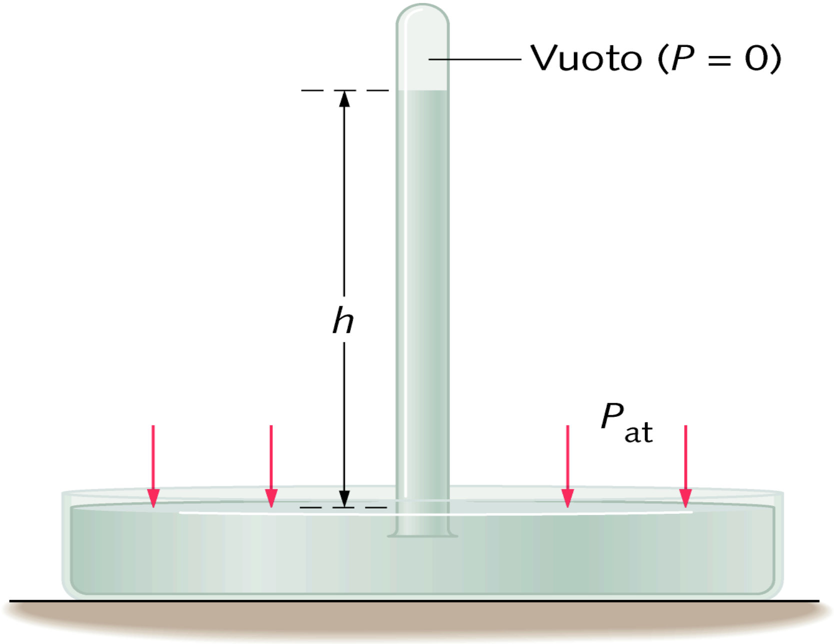
Vasi comunicanti



Se il liquido è in quiete: il liquido è alla stessa altezza in tutti i vasi, indipendentemente dalla loro forma.



Il barometro a mercurio



Il cilindro e la vaschetta sono riempiti di mercurio ($\rho_{Hg} = 13.595 \times 10^3$ kg/m^3)

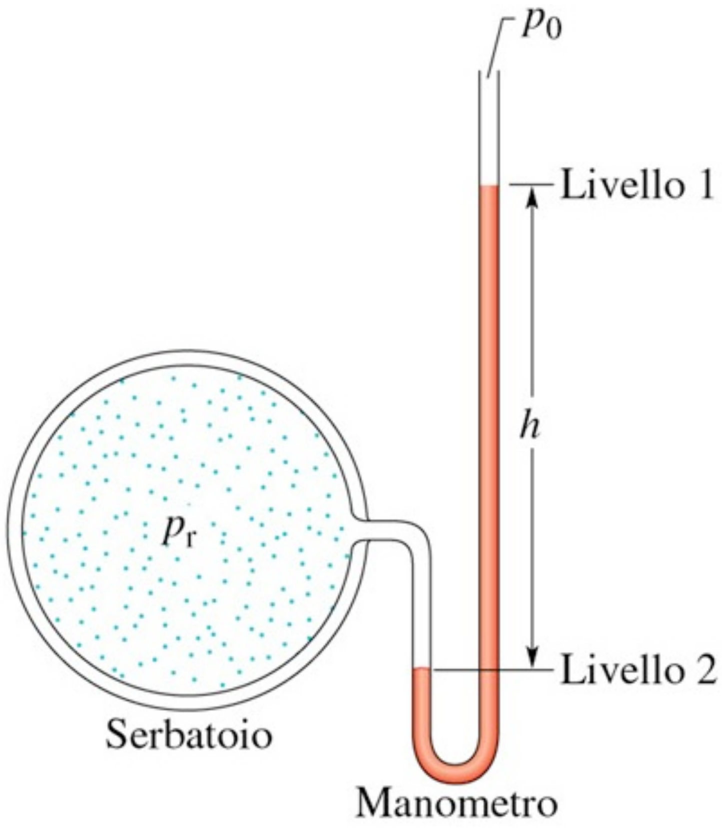
La pressione della colonna di mercurio (h) è uguale alla pressione atmosferica sulla superficie libera della vaschetta:

$$p_0 = \rho_{Hg}\, g\, h$$

Torricelli nel 1643 misurò che l'altezza della colonnina h è 760 mm se il mercurio è a 0 °C

1 atm = 13.595×10^3 kg/m^3 $\times$ 9.8 m/s^2 $\times$ 0.76 m = 1.013×10^5 Pa

Manometro a tubo aperto



La differenza tra la pressione del gas nel serbatoio e la pressione atmosferica è proporzionale all'altezza del fluido nel tubo ad U

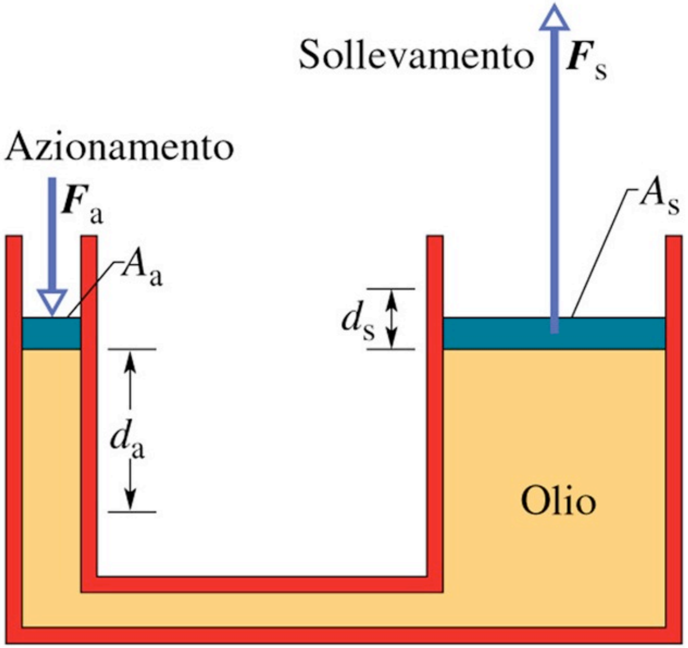
$$p_g = p_0 + \rho g h$$

$$p_r = p_g - p_0 = \rho g h$$

Il principio di Pascal

Un cambiamento di pressione applicato ad un fluido confinato viene trasmesso inalterato a ogni porzione di fluido e alle pareti del recipiente che lo contiene $\Rightarrow$ La pressione è isotropa

Un applicazione del principio di Pascal è la leva idraulica



$P_a = F_a/A_a \qquad P_s = F_s/A_s$

$P_a = P_s$ principio di Pascal

$F_a/A_a = F_s/A_s \Rightarrow F_s = F_a\, A_s/A_a$

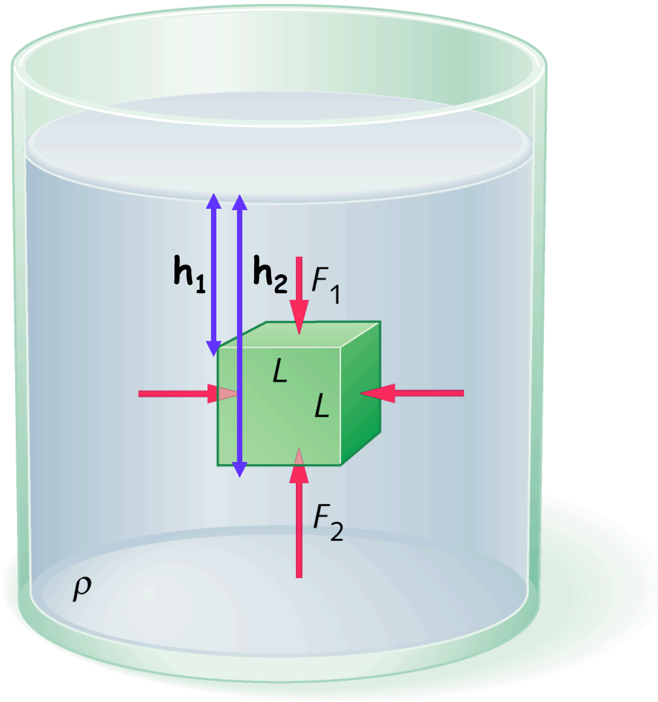
Se $A_s \gg A_a \Rightarrow F_s \gg F_a$ (Moltiplicatore di forza)

Lavoro di azionamento = lavoro di sollevamento

$F_a\, d_a = F_s\, d_s \Rightarrow d_s \ll d_a$

Principio di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto di intensità pari al peso del volume di fluido spostato



Corpo immerso in un liquido
→ due pressioni idrostatiche diverse:
sulla superficie superiore $P_1 = p_0 + \rho g h_1$ ↓
sulla superficie inferiore $P_2 = p_0 + \rho g h_2$ ↑
→ $h_2 > h_1$ → $P_2 > P_1$

Forza risultante verso l'alto:
$F = F_2 - F_1 = (P_2 - P_1)L^2$
$= \rho g (h_2 - h_1) L^2 = \rho\, g\, V = m\, g$

peso del liquido "spostato", non del corpo immerso!

Galleggiamento

Oggetto completamente immerso (ρ_f = densità del fluido, ρ_0 =densità del corpo, V_0= volume del corpo)

$$F_A = m_f g = \rho_f V_0 g \qquad F_g = Mg = \rho_0 V_0 g$$

risultante delle forze

$$F_A - F_g = (\rho_f - \rho_0) V_0 g$$

$= 0$	$\rho_f = \rho_0$	Corpo galleggia
> 0	$\rho_f > \rho_0$	Corpo sale verso l'alto
< 0	$\rho_f < \rho_0$	Corpo affonda

Oggetto galleggiante (parzialmente immerso)
(V = volume di liquido spostato = volume della parte di corpo immersa)

$$F_A = m_f g = \rho_f V g = F_g = Mg = \rho_0 V_0 g \longrightarrow \frac{\rho_0}{\rho_f} = \frac{V}{V_0}$$

Esempio: Iceberg

$$\rho_{ghiaccio} = \rho_0 = 900\, kg/m^3$$

$$\rho_{acqua-mare} = \rho_f = 1025\, kg/m^3$$

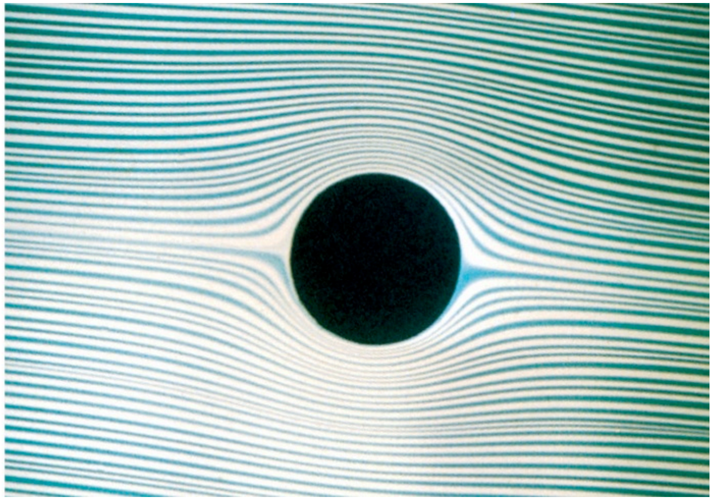
$$\frac{\rho_0}{\rho_f} = \frac{V}{V_0} \approx 9/10$$

Fluidi ideali

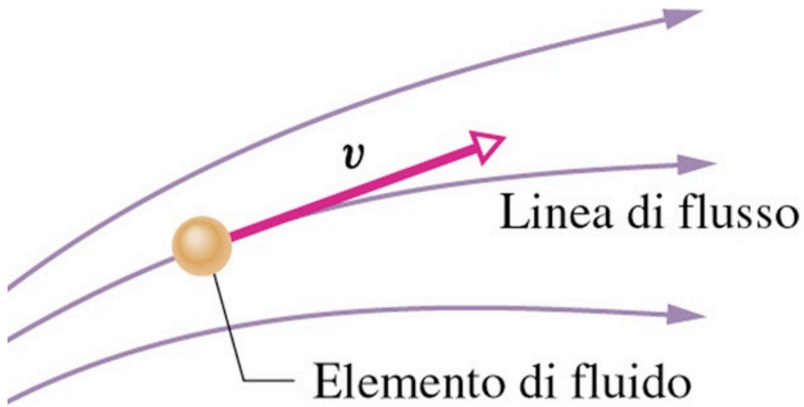
In fluidodinamica si definisce il **"fluido ideale"** :

- incomprimibile (i.e. ρ è costante, indipendente da p, v, T, h, ...);
- viscosità nulla (η = 0, lavoro di scorrimento nullo): la velocità attraverso una sezione trasversale del condotto è uguale in ogni punto.

  N.B. I fluidi reali sono viscosi e l'attrito tra gli strati di liquido fa sì che le velocità siano differenti.
- moto non rotazionale (cfr. i vortici nei fiumi);
- moto **"laminare"**: la velocità in un punto fissato non cambia nel tempo né in modulo né in direzione. Le linee di flusso non si intersecano mai.



Moto laminare in un fluido, messo in evidenza con un tracciante colorato.

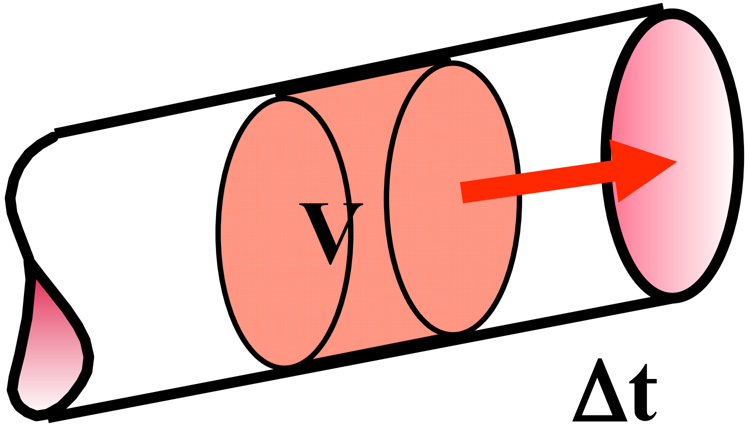


Portata di un fluido

$$\text{portata} = \frac{\text{volume di liquido}}{\text{intervallo di tempo}}$$

$$Q = V/\Delta t$$

m^3/s



SI	cgs	pratico
m^3/s	cm^3/s	l/min

Moto di un fluido:

stazionario → portata costante nel tempo

pulsatile → portata variabile in modo periodico

Flusso e equazione di continuità

Nell'intervallo di tempo Δt:

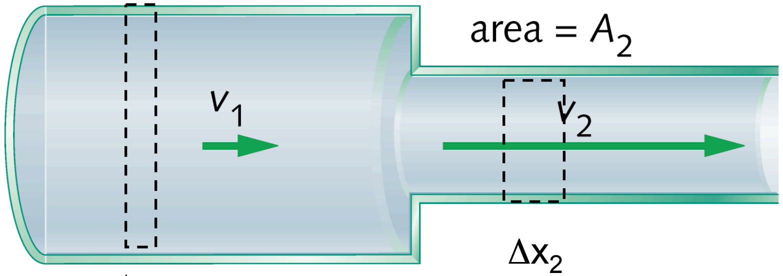
$\Delta x_1 = v_1 \Delta t$

$\Delta x_2 = v_2 \Delta t$

$\Downarrow$

$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$

$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 \Delta x2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$



La massa si conserva $\Rightarrow \Delta m_1 = \Delta m_2$

$$\boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$$ Equazione di continuità

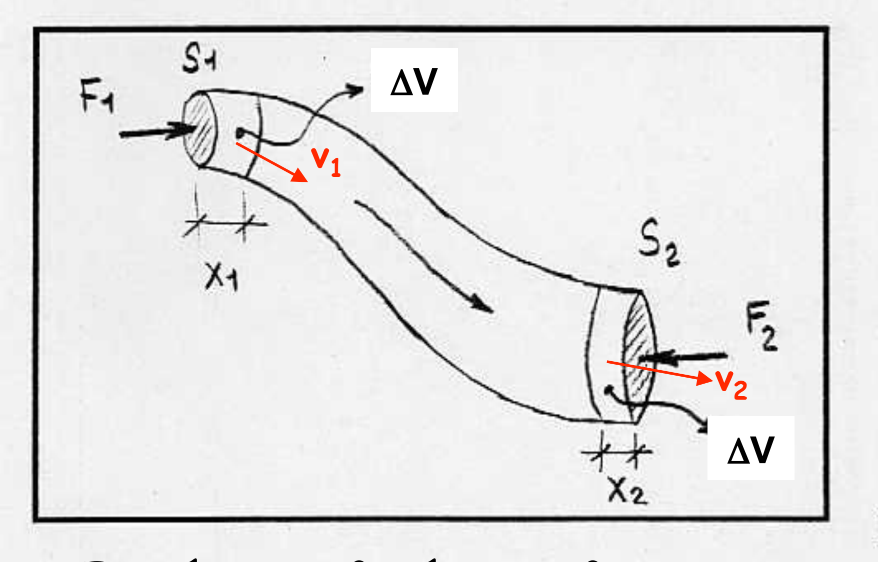
Se il fluido è omogeneo (vero nel caso di liquidi perfettamente incomprimibili)

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

La quantità di fluido che **entra** da una estremità del tubo è uguale alla quantità di fluido che **esce** nello stesso intervallo di tempo [in assenza di perdite]

$\Rightarrow$ **La portata Q è costante**

Equazione di Bernoulli



Consideriamo un volumetto ΔV di fluido **ideale** che si muove nel tempo Δt.
Sia Δm la massa del volumetto ($\Delta m = \rho\, \Delta V$)

Calcoliamo fra i punti 1 e 2:

- la variazione di energia cinetica ΔE_k
- il lavoro delle forze di pressione L_{12p}
- il lavoro della forza peso L_{12g}

$\Delta E_k = \frac{1}{2}\, \Delta m\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, \Delta m\, v_1^2$

$L_{12g} = \Delta m\, g\, h_1 - \Delta m\, g\, h_2$

$L_{12p} = F_1\, x_1 - F_2\, x_2 = p_1\, S_1\, x_1 - p_2\, S_2\, x_2 = (p_1 - p_2)\, \Delta m/\rho$

Da equazione di continuità:

$\Delta V/\Delta t = S_1\, v_1 = S_2\, v_2 \Rightarrow \Delta V = S_1\, v_1\, \Delta t = S_2\, v_2\, \Delta t \Rightarrow \Delta V = \Delta m/\rho = S_1\, x_1 = S_2\, x_2$

Da teorema dell'energia cinetica: $\Delta E_k = L_{12g} + L_{12p}$

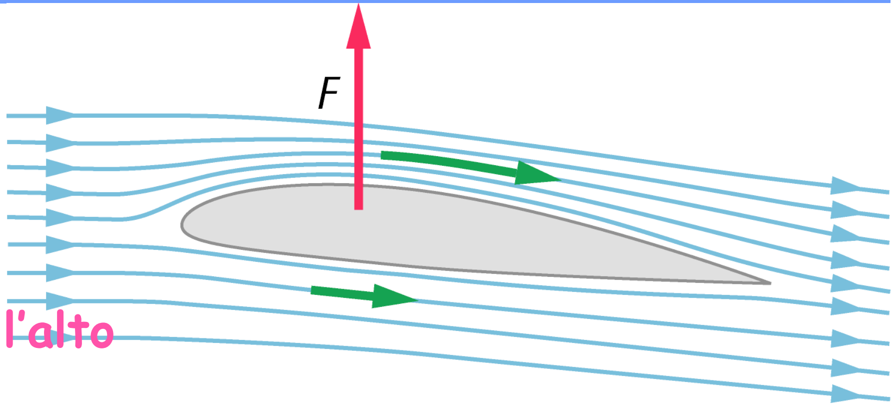
$\Rightarrow \frac{1}{2}\, \cancel{\Delta m}\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, \cancel{\Delta m}\, v_1^2 = \cancel{\Delta m}\, g\, h_1 - \cancel{\Delta m}\, g\, h_2 + p_1\, \cancel{\Delta m}/\rho - p_2\, \cancel{\Delta m}/\rho$

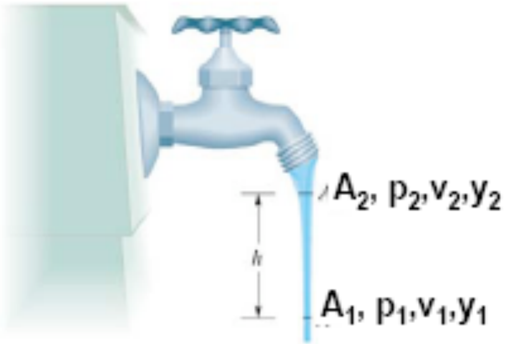
$$\boxed{p + \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 + \rho\, g\, h = \text{costante}}$$

Conservazione dell'energia meccanica

Applicazioni del teorema di Bernoulli

Portanza in un'ala di aereoplano
L'ala è disegnata in modo tale che l'aria scorre più velocemente sulla superficie superiore rispetto a quella inferiore ⇒
$v_{sup} > v_{inf} \Rightarrow p_{sup} < p_{inf} \Rightarrow$ F (portanza) verso l'alto





Il Flusso d'acqua da un rubinetto si restringe cadendo

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

per $p_1 = p_2$= pressione atmosferica

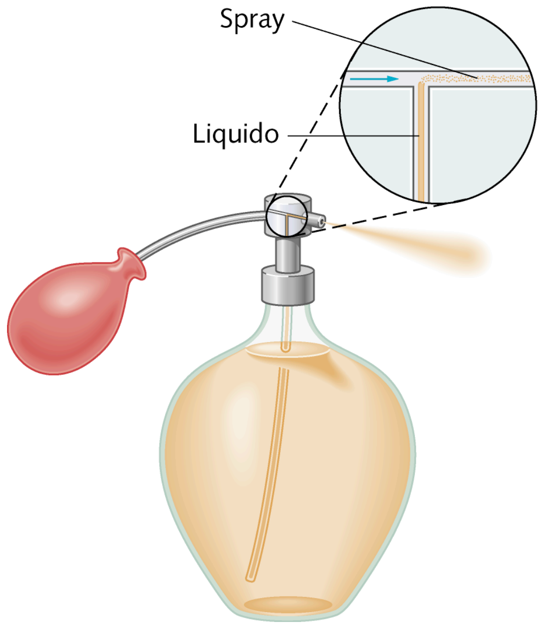
$$\rho g(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

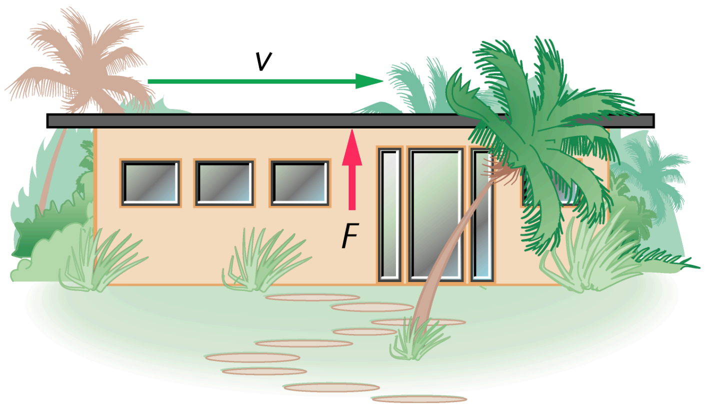
$$gh = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) > 0$$

$\Rightarrow v_1 > v_2$ e $A_2 > A_1$
[da eq. continuità ($A_2 v_2 = A_1 v_1$)]

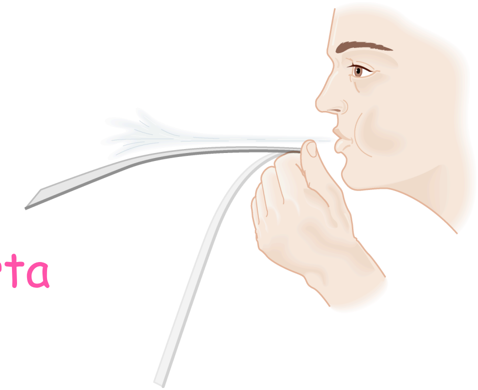
Applicazioni del teorema di Bernoulli (2)

Nebulizzatore
Il getto d'aria ad alta velocità creato
Schiacciando il bulbo produce bassa pressione
In cima al tubicino verticale ⇒ Il liquido è
trascinato verso l'alto



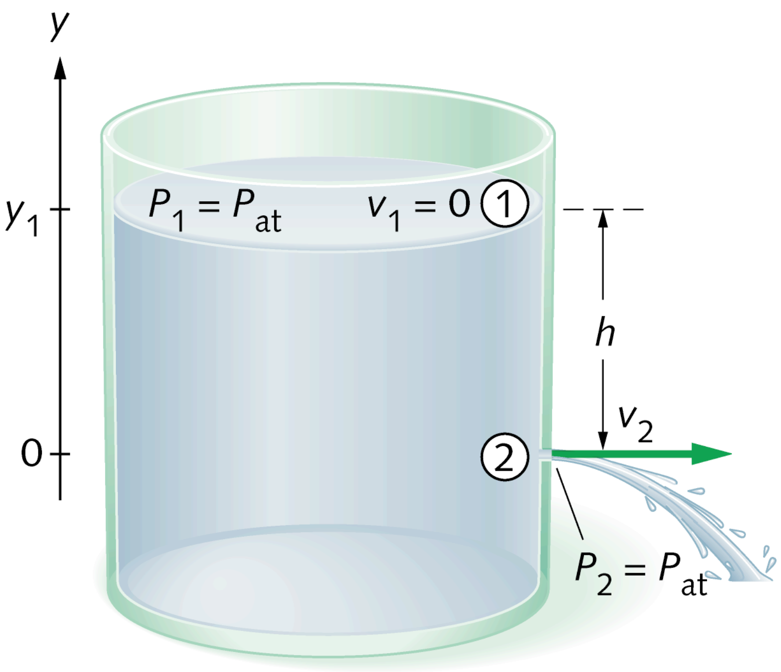


Azione del vento
- sollevamento del tetto
- porte che sbattono



Aria soffiata su foglio di carta

Legge di Torricelli



Liquido che esce da un foro in un recipiente.
Qual è la velocità del getto d'acqua ?

$p_1 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ (eq. Bernoulli)

$p_1 = p_2 = p_0$ (pressione atmosferica)

$v_1 = A_2 v_2 / A_1$ da equazione di continuità
A_1 = superficie del recipiente
A_2 = sezione del foro

se il foro è piccolo: $A_2 \ll A_1 \Rightarrow v_1 = 0$

Sostituendo le 2 condizioni in eq. Bernoulli:

$$v_2 = (2gh)^{1/2}$$

È uguale alla velocità di oggetto in caduta libera

Fluidi reali

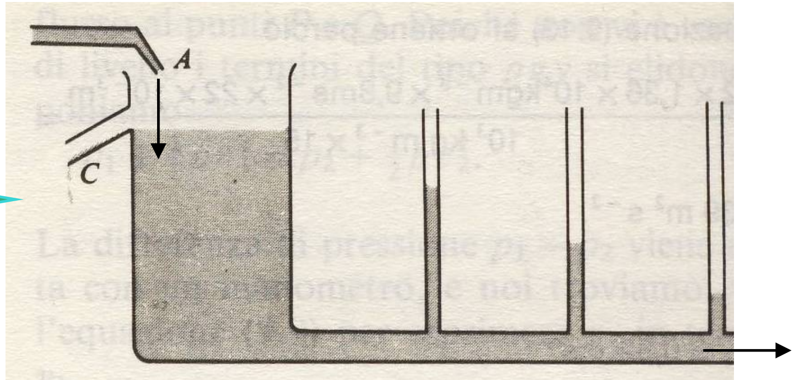
Caratteristiche del flusso:

- **laminare:** gli strati di fluido scivolano l'uno sull'altro, ciascuna particella del fluido segue un percorso regolare, non ne interseca altri. **Velocità costante** in ogni punto del fluido

- **turbolento:** flusso irregolare, percorsi circolari erratici, con regioni simili a **vortici** [es. acqua in prossimità di rocce e strettoie, formazione di rapide]

Viscosità:

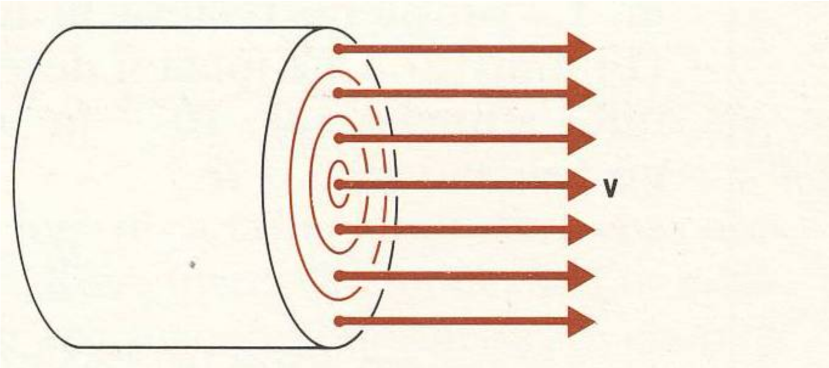
grado di **attrito interno** del fluido
resistenza fra strati adiacenti di liquido in moto relativo ⇒conversione **energia cinetica** in **energia termica**

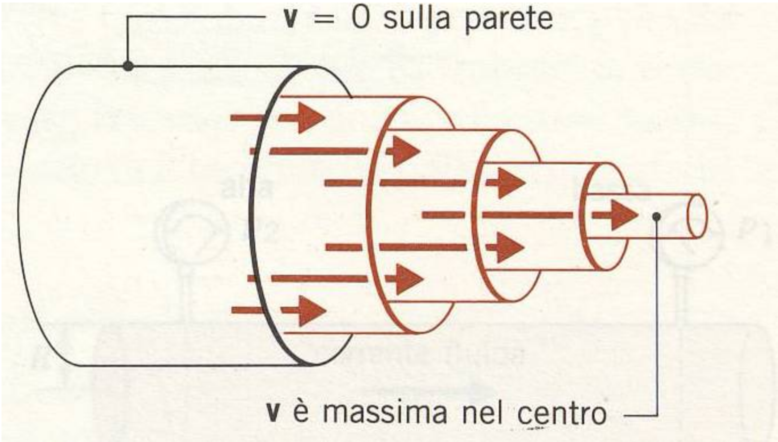


La perdita di carico in un fluido viscoso dimostra che c'è dissipazione di energia

Regime laminare

Modello di liquido come lamine che scorrono le une sulle altre

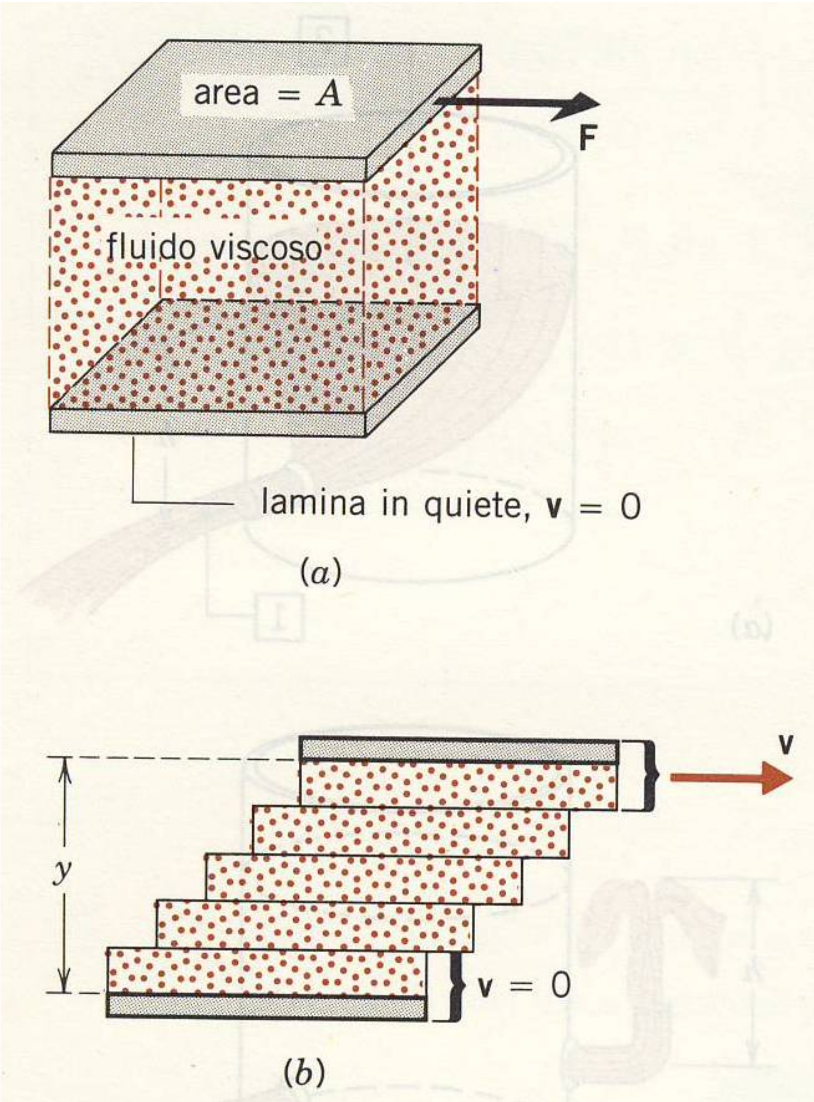




In un fluido **ideale** (non viscoso) tutte le particelle di fluido in una sezione trasversale del tubo hanno la stessa velocità.

Un fluido **reale** manifesta un attrito interno (viscosità).
Si tratta di una forza d'attrito tra strati adiacenti di fluido,che scorrono l'uno sull'altro.
Il fluido è in quiete vicino alle pareti del tubo e ha massima velocità al centro del tubo.

Viscosità



La forza necessaria per muovere uno strato di fluido viscoso a velocità costante è:

$$\boxed{F = \eta \frac{A\,v}{y}}$$

η e' il coefficiente di viscosità

U.D.M. $[ML^{-1}t^{-1}]$

S.I. $\quad \dfrac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s$

C.G.S. $\quad \dfrac{dyna \cdot s}{cm^2} = Poise = 10^{-1} Pa \cdot s$

Viscosità (2)

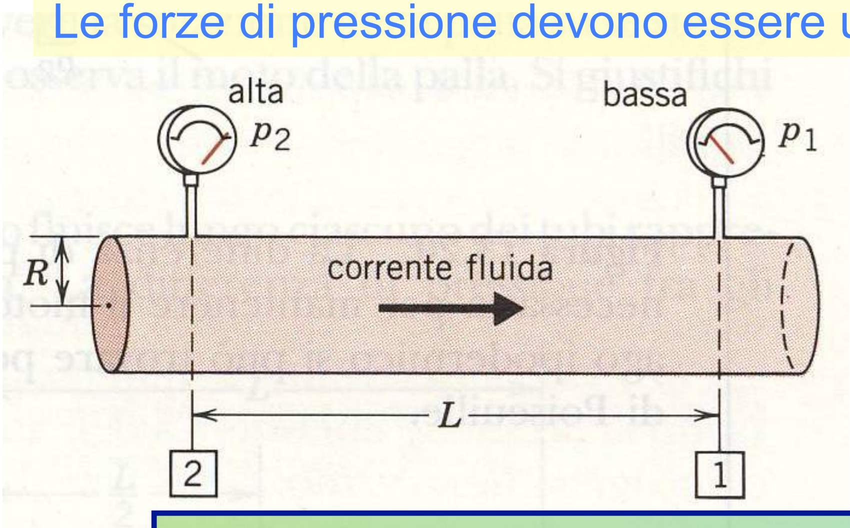
La viscosità nei liquidi decresce rapidamente al crescere della temperatura.

Tabella 13.1. Viscosità dinamiche di fluidi comuni

Fluido	Temperatura (°C)	Viscosità η ($N \cdot s/m^2$)
Gas		
anidride carbonica	20	$0{,}0147 \cdot 10^{-3}$
aria	0	$0{,}0171 \cdot 10^{-3}$
	20	$0{,}0182 \cdot 10^{-3}$
	40	$0{,}0193 \cdot 10^{-3}$
elio	20	$0{,}0196 \cdot 10^{-3}$
Liquidi		
acqua	0	$1{,}78 \cdot 10^{-3}$
	20	$1{,}00 \cdot 10^{-3}$
	40	$0{,}651 \cdot 10^{-3}$
glicerina	20	$1500 \cdot 10^{-3}$
metanolo	20	$0{,}584 \cdot 10^{-3}$
sangue intero	37	$4 \cdot 10^{-3}$

Moto in regime laminare

Per mantenere il flusso di fluido viscoso è necessaria una differenza di pressione.
Le forze di pressione devono essere uguali e contrarie alle forze di attrito interne

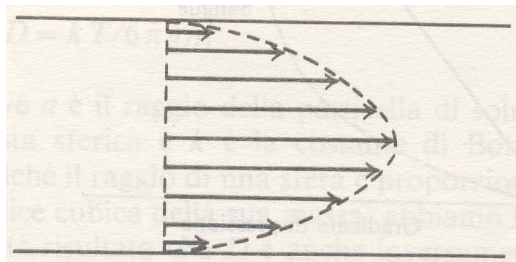


Equazione di Poiseuille

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_2 - p_1)}{8\eta L}$$

In un fluido viscoso "newtoniano" in regime laminare e stazionario, la portata e la velocità del fluido:
- sono direttamente proporzionali al gradiente di pressione Δp
- sono inversamente proporzionali alla viscosità del liquido

La velocità delle lamine ha un profilo parabolico.

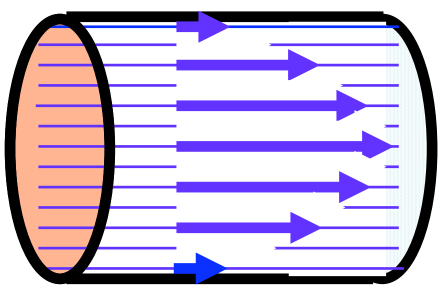


La velocità media

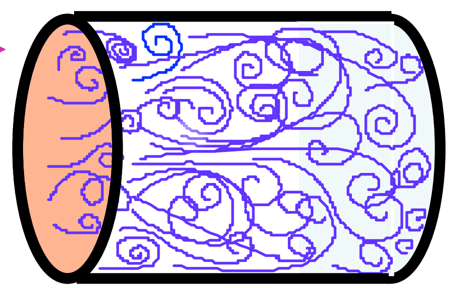
$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 (p_2 - p_1)}{8\eta L}$$

Regime turbolento

Aumentando la differenza di pressione in un condotto, aumenta la velocità del fluido. Quando la velocità supera una certa velocità critica v_c, il modello laminare non funziona più e cessa di valere l'eq. di Poiseuille.
Il moto si fa disordinato, si creano vortici ⇒ regime turbolento



$v > v_c$



$$v_C = \frac{N_R\,\eta}{\rho\,R}$$

N_R è il **numero di Reynolds** (adimensionale).
N_R=2000 per condotti rettilinei senza irregolarità

Nel passaggio al regime turbolento:

- aumenta la resistenza del condotto ⇒ grande dissipazione di energia per attrito.
- Q non è più direttamente prop. a Δp, ma vale $Q \propto \sqrt{\Delta p}$
- la velocità non ha più un profilo regolare ⇒ Il moto è **rumoroso**

Moto dei fluidi reali: sintesi

MOTO STAZIONARIO di un LIQUIDO REALE e OMOGENEO in un CONDOTTO RIGIDO ← approx. iniziale

REGIME LAMINARE

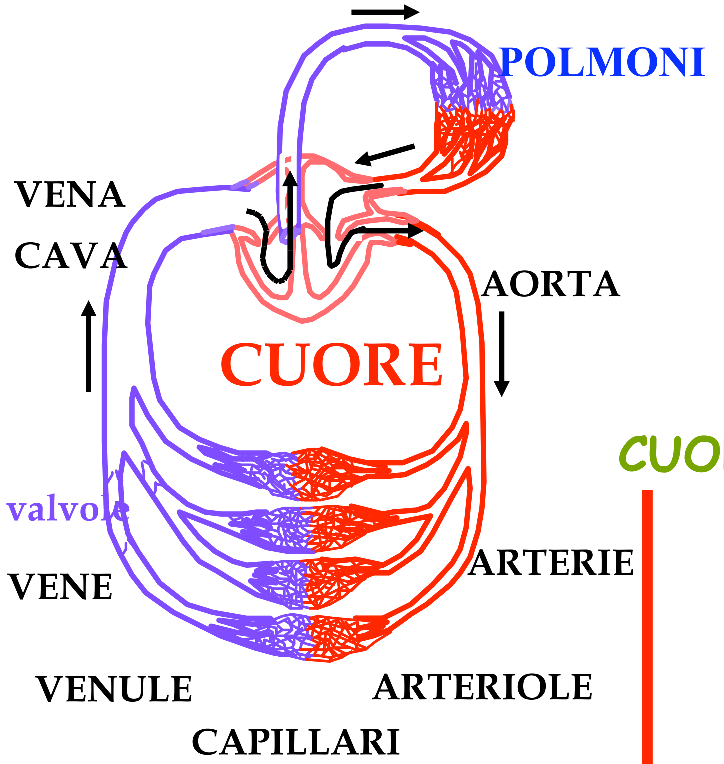
- lamine e profilo velocità parabolico
- $Q \propto \Delta p$
- silenzioso

$v > v_c$

REGIME TURBOLENTO

- vortici
- $Q \propto \sqrt{\Delta p}$
- rumoroso (alta dissipazione di energia per attrito)

Il sistema circolatorio



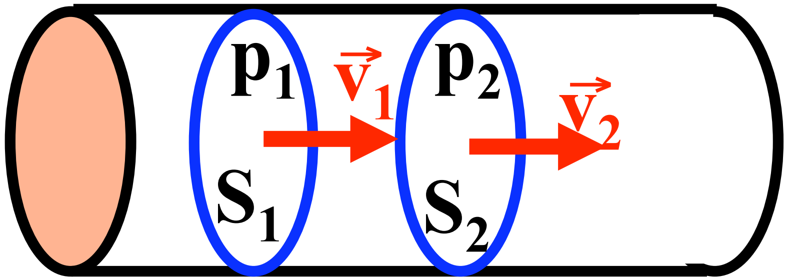
- Circuito chiuso
- Sangue è fluido non-newtoniano ($Q \not\propto \Delta p$)
- Portata costante (5 l/min)
- Arterie e vene sono condotti deformabili

CUORE

	velocità media (cm/s)	pressione media (mmHg)
AORTA	50÷40	100
ARTERIE	40÷10	100÷40
ARTERIOLE	10÷0.1	40÷25
CAPILLARI	<0.1	25÷12
VENULE	<0.3	12÷8
VENE	0.3÷5	8÷3
VENA CAVA	5÷25	2

Sistema circolatorio: diminuzione di pressione

Vaso sanguigno a sezione costante ($S_1=S_2$) in posizione orizzontale ($h_1=h_2$):



Eq. continuità: $Q=Sv_1=Sv_2=cost.$

$\rightarrow v_1 = v_2 = costante$

$v = costante$

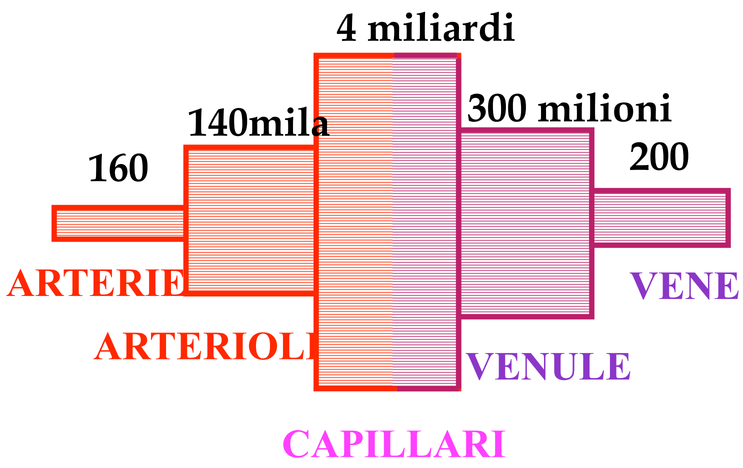
$h = costante$ BERNOULLI $\longrightarrow p = costante$

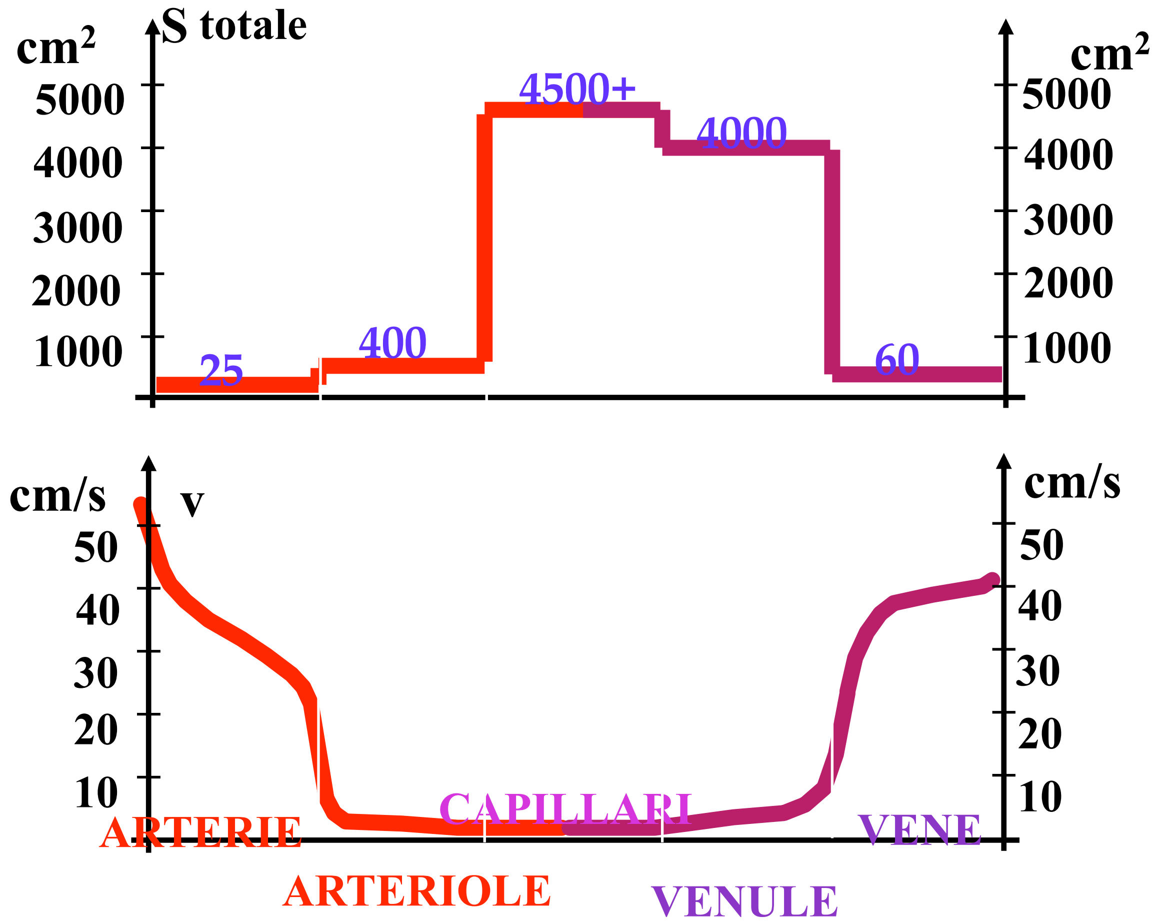
forze di attrito viscoso $\longrightarrow$ dissipazione di energia

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 + A$$

$\longrightarrow p_1 = p_2 + A \longrightarrow p_1 - p_2 = A \longrightarrow p_2 < p_1$

Velocità del sangue - 1





Paradossalmente,
al contrario di quanto prevederebbe l'equazione di continuità, la velocità é bassissima nei capillari perché il loro numero è altissimo!

Velocità del sangue - 2

Portata del sangue:

$Q = 5\ l/min = (5000\ cm^3)/(60\ s) = 83.33\ cm^3/s$

Velocità del sangue nei vari distretti:

AORTA (r=0.8 cm)	$S = \pi r^2 \approx 2\ cm^2$	$v = Q/S \approx 40\ cm/s$
ARTERIOLE	$S \approx 400\ cm^2$	$v = Q/S \approx 0.2\ cm/s$
CAPILLARI	$S \approx 4000\ cm^2$	$v = Q/S \approx 0.02\ cm/s$
VENA CAVA (r=1.1 cm)	$S = \pi r^2 \approx 4\ cm^2$	$v = Q/S \approx 20\ cm/s$

La bassissima velocità del sangue nei capillari (0.2 mm/s) permette gli scambi di sostanze (reazioni chimiche) necessari alla vita.

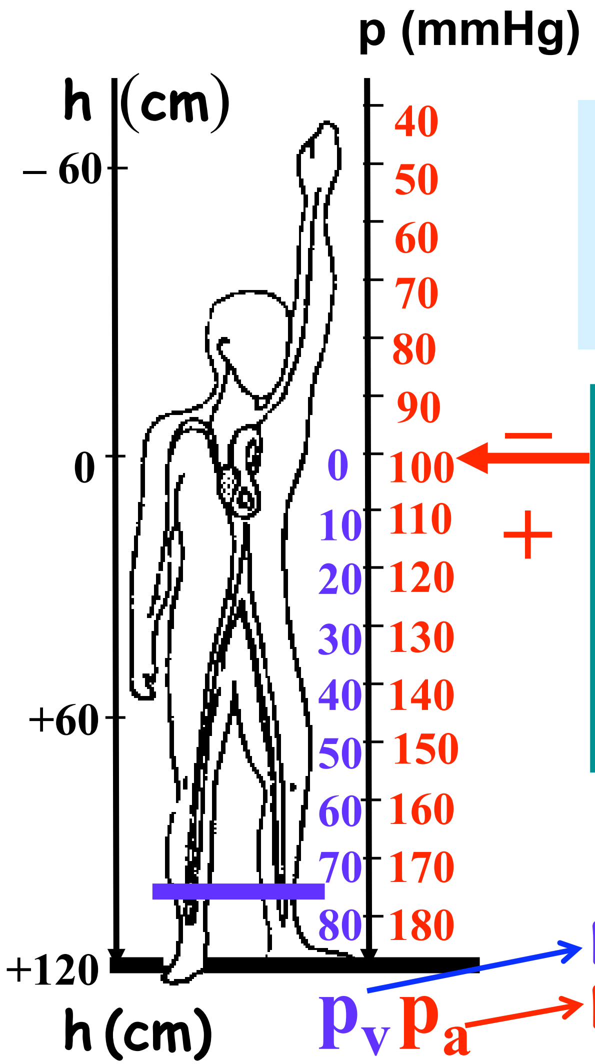
Stimare quanti capillari ci sono nel corpo (assumendo $r_{capil} = 4\times10^{-4}$ cm)

$A_{aorta}\, v_{aorta} = N\, A_{capil}\, v_{capil}$

$\pi\, r^2_{aorta}\, v_{aorta} = N\, \pi\, r^2_{capil}\, v_{capil}$

$N = (r_{aorta}/r_{capil})^2\, v_{aorta}\, (v_{capil})^{-1} = [0.8/(4\times10^{-4})]^2 \times (40/0.02) = 8\times10^9$

Effetti fisiologici della pressione idrostatica



In posizione eretta, alla pressione sanguigna si aggiunge un fattore di pressione idrostatica (peso del sangue)

Es.

Aumento di pressione a livello dei piedi:

distanza cuore-piedi ~ 1 m; $\rho_{sangue} \sim \rho_{acqua}$

$P = \rho g h = (10^3\ kg/m^3)\cdot(9.8\ m/s^2)\cdot(1\ m)$

$= 9800\ Pa = 9800 \cdot (760/101325)\ mmHg$

$=$ **74 mmHg (non trascurabile!)**

Moto dei corpi nei fluidi viscosi

- Un corpo (densità ρ_c) che si muove in un fluido reale (ρ e viscosità η), risente di una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità del corpo (se non è troppo elevata, il moto non crea turbolenze)

$$F = f\,v$$

f= coefficiente di attrito viscoso, dipende da forma del corpo e da η

- Se il corpo ha forma sferica di raggio r vale la legge di Stokes

$$F = 6\,\pi\,\eta\,r\,v$$

- Se un corpuscolo cade per gravità dentro un fluido in quiete, raggiunge una velocità di regime o sedimentazione

All'equilibrio, il peso è bilanciato da spinta archimedea e resistenza viscosa

$$mg - F_a - F_{visc} = \rho_c V g - \rho V g - f\,v = 0 \Longrightarrow \boxed{v_s = \frac{V(\rho_c - \rho)\,g}{f}}$$

Se il corpuscolo è sferico

$$\rho_c \frac{4}{3}\pi\,r^3 g - \rho \frac{4}{3}\pi\,r^3 g - 6\,\pi\,\eta\,r v = 0 \Longrightarrow \boxed{v_s = \frac{2\,r^2(\rho_c - \rho)\,g}{9\,\eta}}$$

Mediante sedimentazione si possono separare particelle differenti in un fluido

La centrifuga

Se le particelle in sospensione in un fluido sono molto piccole, la velocità di sedimentazione per gravità è bassa.

Centrifughe e ultracentrifughe si usano per separare diversi tipi di cellule e macromolecole, presenti in una soluzione o sospensione.

La provetta contenente la soluzione è posta in rotazione con velocità angolare ω intorno ad un asse verticale.
Si dimostra, in modo analogo alla sedimentazione per gravità, che la velocità di sedimentazione in una centrifuga è

$$\boxed{v_S^C = \frac{V(\rho_c - \rho)\,\omega^2 R}{f}} \xrightarrow{\text{corpuscoli sferici}} \boxed{v_S^C = \frac{2\,r^2(\rho_c - \rho)\,\omega^2 R}{9\,\eta}}$$

dove a g della formula per la sedimentazione per gravità si è sostituita la accelerazione centrifuga $\omega^2 R$ (R è la distanza dall'asse di rotazione)

Il coefficiente di sedimentazione

Il coefficiente di sedimentazione S è definito come la velocità di sedimentazione in un campo di forza unitaria (velocità/acc. centrifuga)

$$S = \frac{v_S^C}{\omega^2 R} = \frac{V(\rho_c - \rho)}{f}$$

Unità di misura pratica: Svedberg (S) $\quad 1\ S = 10^{-13}\ s$

enzimi, ormoni peptidici, proteine	$2 \div 25$ S
Acidi nucleici	$3 \div 100$ S
Ribosomi e polisomi	$20 \div 200$ S
virus	$40 \div 1.000$ S
lisosomi	4.000 S
membrane	$10^2 \div 10^5$ S
mitocondri	$(20 \div 70)\ x10^3$ S
nuclei	$(4 \div 40)\ x10^6$ S

Esercizi svolti sui fluidi

Esercizio n.1

Per scoppiare un palloncino serve una pressione minima di 3 atm. Trovare la forza minima necessaria nel caso si usi un dito ($A = 10^{-4}\ m^2$), uno spillo ($A = 10^{-7}\ m^2$) o il palmo della mano ($A = 0.0025\ m^2$).

Soluzione

$F_{min} = P_{min} * A$

$P_{min} = 3\ atm = 3*101325\ Pa = 303975\ Pa$

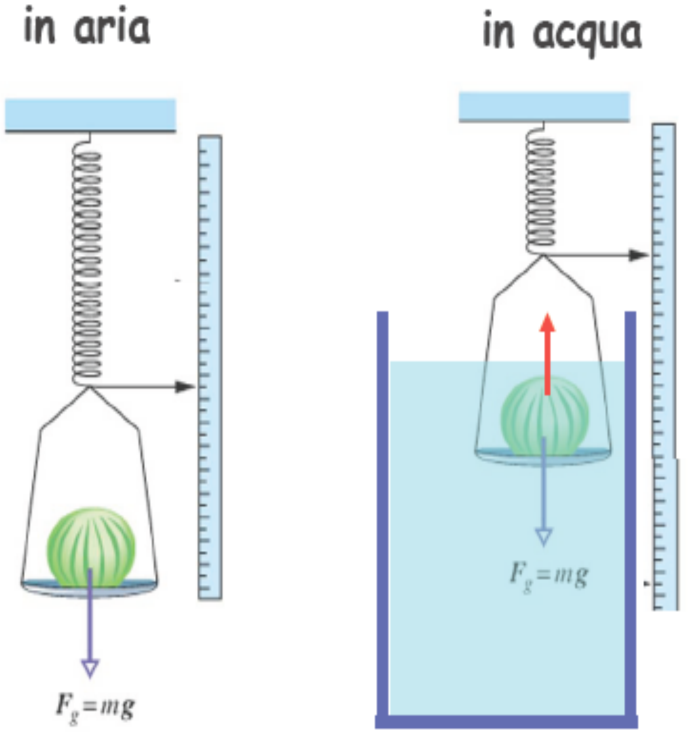
Dito) $F_{min} = 303975 * 10^{-4}\ N = 30.3975\ N$

Spillo) $F_{min} = 303975 * 10^{-7}\ N = 0.0303975\ N$

Palmo) $F_{min} = 303975 * 0.0025\ N = 760\ N$

Esercizio n.2

Una corona appesa ad una bilancia pesa 10 kg in aria. La misura ripetuta in acqua dà come risultato 8.88 kg. La corona è d'oro oppure no?
(densità dell'oro = 19.3×10^3 kg/m^3)



Soluzione

Il peso apparente di un oggetto immerso in acqua è:

$P_{app} = mg - F_a = \rho\, V\, g - \rho_{H2O}\, V\, g$

mentre il suo peso in aria è:

$P = mg = \rho\, V\, g$

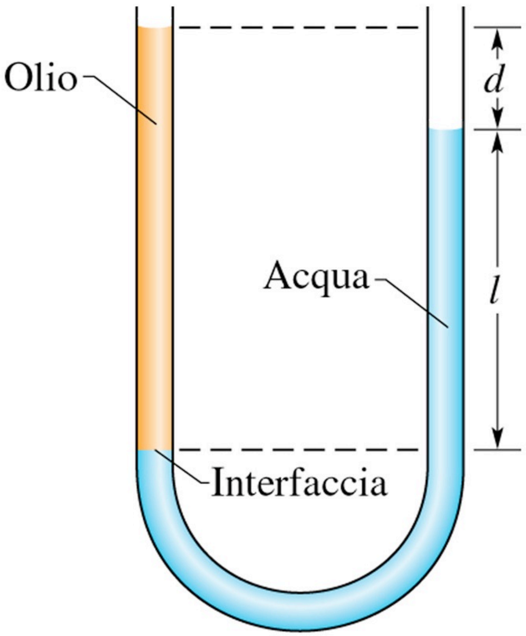
Dividendo le due equazioni si ottiene:

$$\frac{P_{app}}{P} = 1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{P}{P - P_{app}}$$

$$\rho = \rho_{H_2O} \frac{P}{P - P_{app}} = 10^3 \frac{10}{10 - 8.88}\ \mathrm{kg/m^3} = 8.3 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$$ ⟹ La corona non è d'oro

Esercizio n.3

Il tubo ad U in figura contiene olio e acqua in equilibrio statico. Si misura l =135 mm e d=12.3 mm. Trovare la densità dell'olio.



Soluzione

In condizioni di equilibrio, le pressioni idrostatiche delle 2 colonne di fluido sopra l'interfaccia devono essere uguali:

$$p_0 + \rho_{olio}\, g\, (l+d) = p_0 + \rho_{H2O}\, l$$

da cui si ricava:

$$\rho_{olio} = \rho_{H2O}\, l/(l+d) = 10^3 \times 135/(147.5) = 927 \text{ kg/m}^3$$

Esercizio n.4

Qual è il volume minimo elio con cui occorre riempire il pallone di una mongolfiera per sollevare un carico di 1000 kg. Quanto vale il raggio del pallone? (densità elio = 0.14 kg/m^3, densità aria 1.3 kg/m^3)

Soluzione

La forza ascensionale è $F_{asc} = F_a – (m+M)\, g$

dove M è la massa del carico, m la massa dell'elio e F_a la spinta di Archimede che risente il pallone (si assume che il carico sposti un volume di aria trascurabile rispetto al pallone).

$m = \rho_{He} V \qquad F_a = \rho_{Aria} V g$

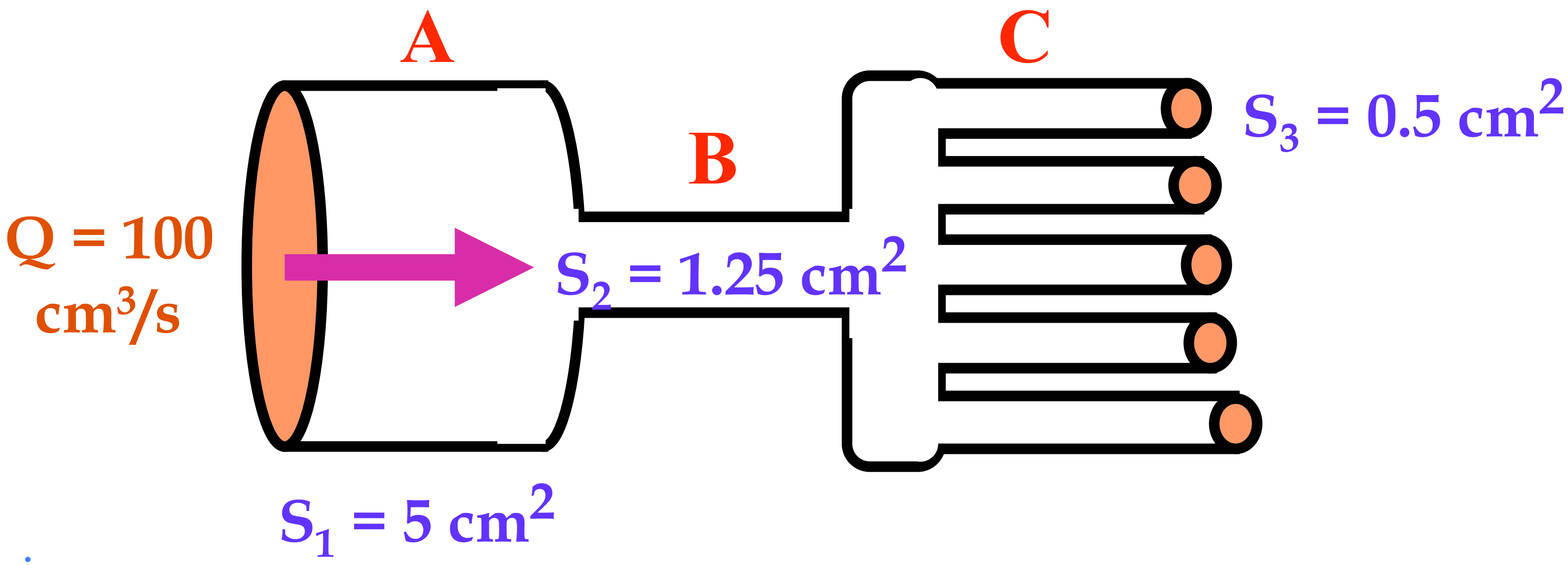
$F_{asc} = \rho_{Aria} V g - \rho_{He} V g – Mg > 0$ condizione affinché il pallone salga

$V > M / (\rho_{Aria} – \rho_{He}) = 1000/ (1.3 – 0.14)\ m^3 = 862\ m^3$

$V_{min} = 862\ m^3 = 4/3\, \pi\, R^3_{min} \Rightarrow R_{min} = (\,¾\, V_{min}/\pi\,)^{1/3} = 5.9\ m$

Esercizio n.5

Trovare la velocità di un liquido omogeneo nei tratti A, B, C del condotto in figura.



Soluzione

A) $Q = S_1 v_1 \Rightarrow \quad v_1 = Q/S_1 = 100/5$ cm/s $= 20$ cm/s

Dall'equazione di continuità $\Rightarrow$ la portata in B è uguale alla portata Q del tratto A

B) $S_1 v_1 = Q = S_2 v_2 \Rightarrow \quad v_2 = Q/S_2 = 100/1.25$ cm/s $= 80$ cm/s

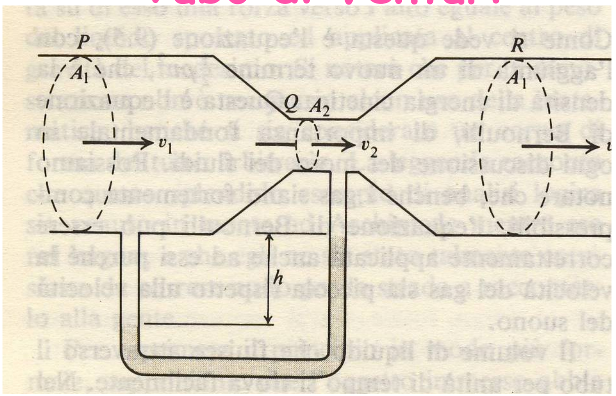
Se il condotto si apre in più diramazioni, bisogna considerare la superficie totale.

C) $Q = 5 \times S_3 v_3 \Rightarrow \quad v_3 = Q/(5 \times S_3) = 100/(5 \times 0.5)$ cm/s $= 40$ cm/s

Esercizio n.6

Un tubo di diametro 4 cm presenta una strozzatura di diametro 2 cm. In esso scorre acqua. Con un manometro si misura una differenza di pressione fra il condotto principale e la strozzatura pari a 22 torr. Calcolare la velocità del fluido nel tubo principale.

Tubo di Venturi



Soluzione

Area del tubo principale $A_1 = \pi (d_1/2)^2 = \pi (4/2)^2$ cm^2

Area della strozzatura $A_2 = \pi (d_2/2)^2 = \pi (2/2)^2$ cm^2

$\Rightarrow A_1/A_2 = 4$

$p_1 - p_2 = 22$ torr $= 22 \times (101325/760)$ Pa $= 2933$ Pa

Da equ. di continuità $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = A_1/A_2 \, v_1$ (1) $\Rightarrow v_2 > v_1$

Da equ. Bernoulli $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$ (2) $\Rightarrow p_1 > p_2$

Sostituendo v_2 dalla (1) in (2) $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (A_1/A_2)^2 v_1^2$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}} = \sqrt{\frac{2 \times 2933}{1000(4^2 - 1)}} \text{ m/s} = 0.62 \text{ m/s}$$

Effetto Venturi o paradosso idrodinamico: $v_2 > v_1 \Rightarrow p_1 > p_2$

Esercizio n.7

L'arteria polmonare è lunga 8.5 cm con ΔP ai suoi estremi 450 Pa. Se il raggio interno dell'arteria è 2.5 mm, qual è la velocità media del sangue nell'arteria polmonare? (L=8.5 cm; η=0.027 Poise)

Soluzione

Consideriamo il sangue un fluido viscoso in regime laminare per poter applicare l'equazione di Poiseuille. La velocità media è data dalla formula:

$$v = \frac{R^2 \, \Delta p}{8 \, \eta \, L} = \frac{(2.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \times 450 \text{ Pa}}{8 \times (0.027 \times 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}) \times 0.085 \text{ m}} = 1.4 \text{ m/s}$$

Esercizio n.8

Un liquido (η= 0.05 poise ρ =1.1 g/cm^3) scorre in un condotto a sezione circolare di raggio1.2 mm e lunghezza L=25 cm. Calcolare:

a) Velocità media di flusso assumendo sia laminare e che agli estremi la differenza di pressione sia 0.1 atm

b) Velocità critica (N_R=1500)

c) Che differenza di pressione bisogna applicare perché il flusso diventi turbolento?

Soluzione

a) $$v = \frac{R^2\,\Delta p}{8\,\eta\,L} = \frac{(1.2\times10^{-3}\ \mathrm{m})^2\times0.1\times101325\ \mathrm{Pa}}{8\times(0.05\times0.1\ \ \mathrm{Pa\cdot s})\times0.25\ \mathrm{m}} = 1.46\ \mathrm{m/s}$$

b) $$v_c = \frac{N_R\ \eta}{\rho\,R} = \frac{1500\times0.005\ \mathrm{Pa\cdot s}}{1100\ \mathrm{kg}\ \cdot\mathrm{m}^{-3}\times1.2\times10^{-3}\mathrm{m}} = 5.7\ \mathrm{m/s}$$

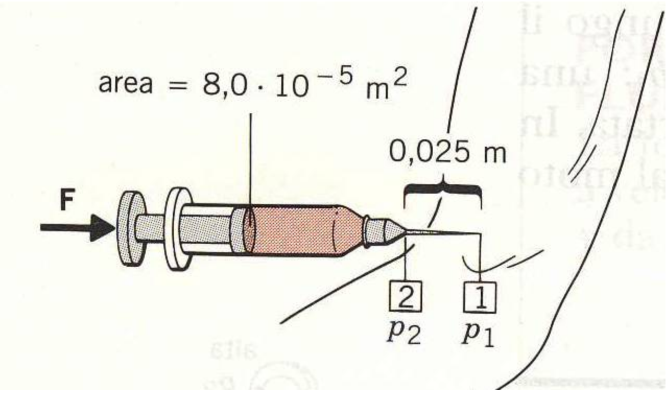
c) $$v > vc \Rightarrow \frac{R^2\,\Delta p}{8\,\eta\,L} > \frac{N_R\eta}{\rho R}$$

$$\Delta p > \frac{8\,L\,N_R\eta^2}{\rho R^3} = \frac{8\times0.25\ \mathrm{m}\times1500\times(0.005\ \mathrm{Pa\cdot s})^2}{1100\ \mathrm{kg\cdot m}^{-3}\times(1.2\times10^{-3}\ \mathrm{m})^3} = 39457\ \mathrm{Pa} = 0.39\ \mathrm{atm}$$

Esercizio n.9

Una siringa ipodermica contiene una medicina di viscosità 1.5×10^{-3} Pa s. L'area dello stantuffo è 8×10^{-5} m^2, e l'ago è lungo 2.5 cm e ha raggio interno 0.4 mm. La pressione relativa in una vena è 14 mmHg. Che forza si deve applicare allo stantuffo per iniettare 10^{-6} m^3 di medicina in 3 s?

Soluzione $\quad Q_v = 10^{-6}\ \mathrm{m^3}/3\ \mathrm{s} = 3.3\times10^{-7}\ \mathrm{m^3/s}$



$$Q_V = \frac{\pi R^4 (p_2 - p_1)}{8\eta L}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{8\eta L Q_V}{\pi R^4}$$

$$= \frac{8(1{,}5\cdot10^{-3}\ \mathrm{N\cdot s/m^2})(0{,}025\ \mathrm{m})(3{,}3\cdot10^{-7}\ \mathrm{m^3/s})}{\pi(4{,}0\cdot10^{-4}\ \mathrm{m})^4}$$

$$= 1200\ \mathrm{Pa}$$

p_1 = 14 mmHg = 1900 Pa $\Rightarrow$ $p_2 = p_1$+1200 Pa = 3100 Pa

$$F = (3100\ \mathrm{Pa})(8{,}0\cdot10^{-5}\ \mathrm{m^2}) = \boxed{0{,}25\ \mathrm{N}}$$

Esercizio n.10

Si vuole separare per sedimentazione dell'albumina (coeff. di sedimentazione = 4.6 S). Calcolare la velocità di sedimentazione:

a) per gravità;

b) utilizzando una centrifuga di raggio 10 cm e velocità di rotazione di 10^4 rpm (rotazioni per minuto)

Soluzione

a) $V_s = S\,g = 4.6\text{ S} \times 9.8\text{ m s}^{-2} = 4.6 \times 10^{-13}\text{ s} \times 9.8\text{ m s}^{-2} = 4.5 \times 10^{-10}\text{ cm/s}$

b)

$$\omega = \frac{2\pi \times 10^4}{60\,\text{s}} = 1046\ \text{s}^{-1}$$

$$a_c = \omega^2 R = 1046^2 \times 0.1\ \text{m s}^{-2} = 109551\,\text{m s}^{-2} \approx 10^4\,\text{g}$$

$$v_S^C = S\omega^2 R = 4.6 \times 10^{-13}\ \text{s} \times 109511\,\text{m s}^{-2} = 5 \times 10^{-6}\,\text{cm/s}$$