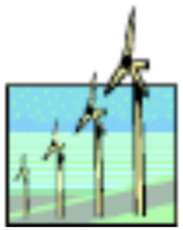
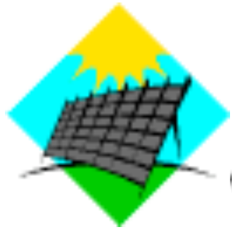
Lavoro ed energia

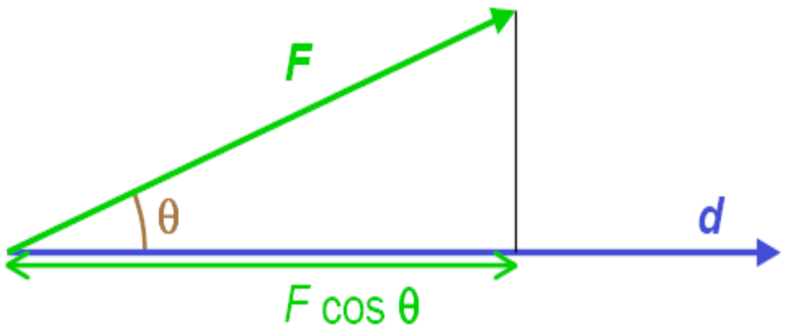
Lavoro: definizione e unità di misura
Energia cinetica
Teorema delle forze vive
Forze conservative e energia potenziale
Energia potenziale gravitazionale ed elastica
Conservazione dell'energia
Potenza
Rendimento di una macchina

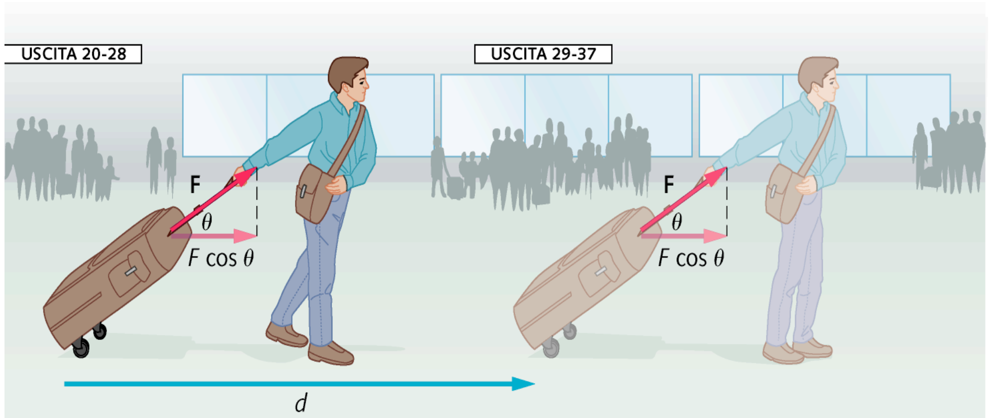






Lavoro di una forza costante



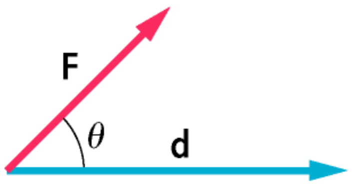


$$\boxed{L = \vec{F}\cdot\vec{d} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right|\cos(\theta)}$$

$L > 0$ se F,d concordi $(\theta < 90°)$;

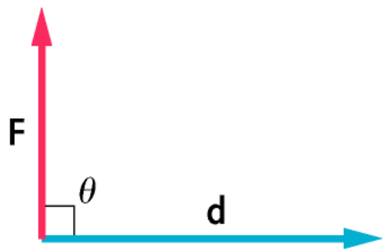
$L < 0$ se F,d discordi $(\theta > 90°)$;

$L = 0$ se F,d ortogonali $(\theta = 90°)$.



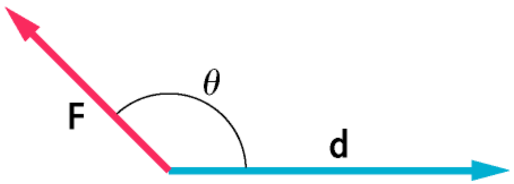
$-90° < \theta < 90°$

$\mathbf{L} > 0$



$\theta = 90°$

$\mathbf{L} = 0$



$90° < \theta < 270°$

$\mathbf{L} < 0$

Unità di misura del lavoro

Equazione dimensionale

$$[L] = [Fl] = [ml^2t^{-2}]$$

Unità di misura

$\boxed{J = N \cdot m}$

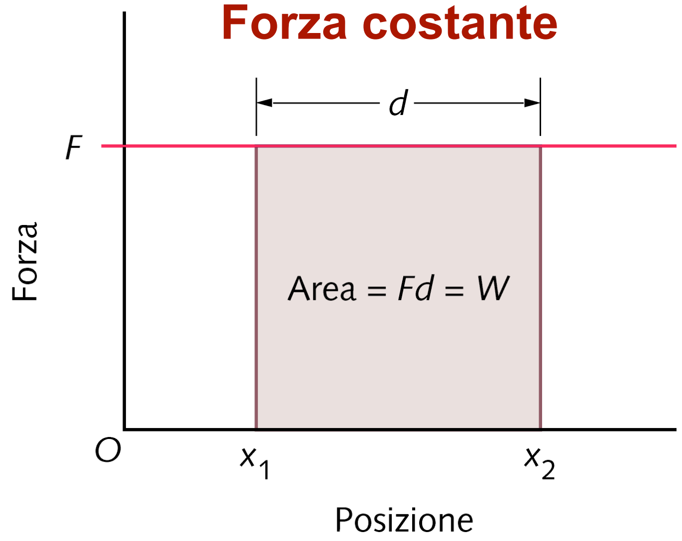
SI	cgs	pratici
joule	erg	→energia (kWh, cal, eV,...)

Es.

Relazione tra joule e erg:

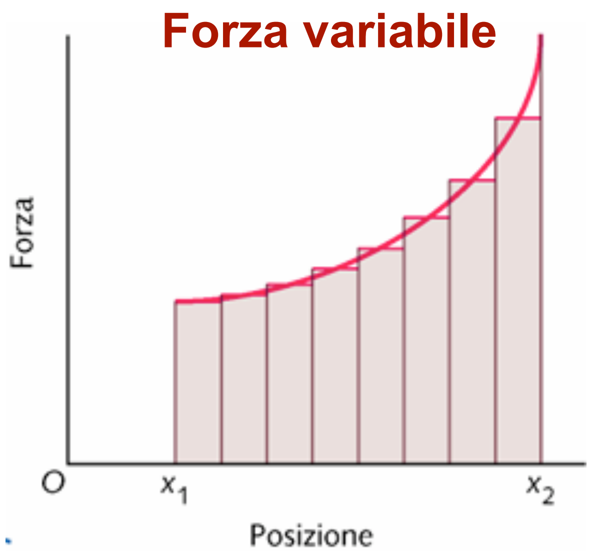
1 J = 1 N · m = (10^5 dine) · (10^2 cm) = 10^7 dine · cm = 10^7 erg

- L'espressione precedente può essere "non definita" se una delle grandezze in gioco varia in modulo e/o in direzione nel periodo considerato.



- In tale caso, occorre scomporre il tragitto in intervalli piccoli (al limite, infinitesimi) e considerare il lavoro totale come la somma dei lavori infinitesimi, corrispondenti ai tragitti:

$$\boxed{L = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}}$$



Energia

Energia = capacità potenziale di compiere lavoro meccanico

stessa unità di misura del lavoro: joule

L'energia si manifesta in forme diverse
e si puo' trasformare da una forma all'altra.
Il lavoro compiuto su un corpo
diventa energia immagazzinata,
cioè capacità di compiere ulteriore lavoro.

- cinetica
- potenziale gravità
- potenziale elastica
- potenziale elettrica
- termica (calore)
- chimica
- nucleare
- ....

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

In un sistema isolato, l'energia totale rimane costante.

L'energia non si crea e non si distrugge: si trasforma!

Energia cinetica

Un corpo di massa **m** che si muove con velocità **v** possiede un' **energia cinetica**:

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

- Aumento di velocità = somministrazione di energia

- L'energia cinetica dipende solo dal modulo della velocità, <u>non</u> da direzione e verso

Equazione dimensionale

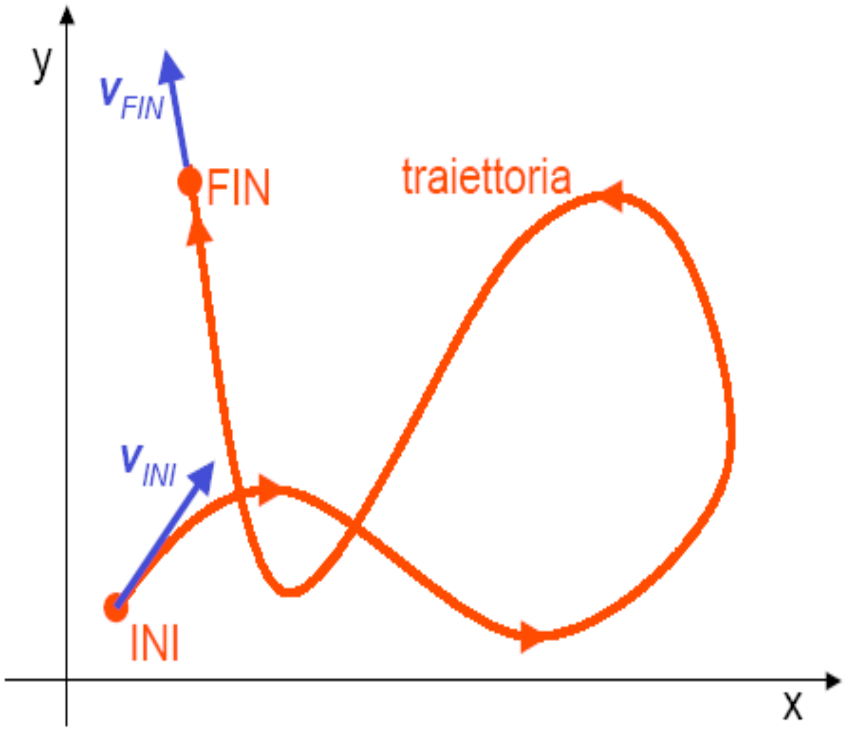
$$[T] = [mv^2] = [ml^2t^{-2}]$$

Unità di misura

Joule

Teorema delle "forze vive"

$$L = \Delta T = T_{fin} - T_{ini} = \frac{1}{2} mv^2{}_{fin} - \frac{1}{2} mv^2{}_{ini}$$



Il lavoro totale compiuto dalle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

Forze conservative

Una forza è conservativa :

1. se il lavoro compiuto per spostare un corpo dal punto A al punto B non dipende dal cammino seguito, ma solo dalla posizione relativa di A e B

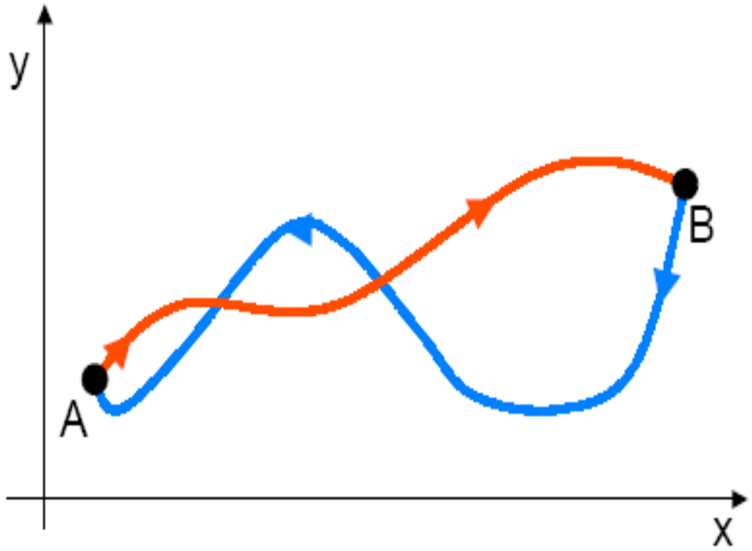
   $\Rightarrow \quad L_{AB} = L_{AB}$

   oppure

2. se il lavoro compiuto per spostare un corpo dal punto A al punto B è uguale e contrario al lavoro compiuto per farlo ritornare da B a A, indipendentemente dal cammino seguito $\Rightarrow L_{AB} = - L_{BA}$

   oppure

3. se **L=0** in un ciclo chiuso $\Rightarrow L_{AB} + L_{BA}=0$



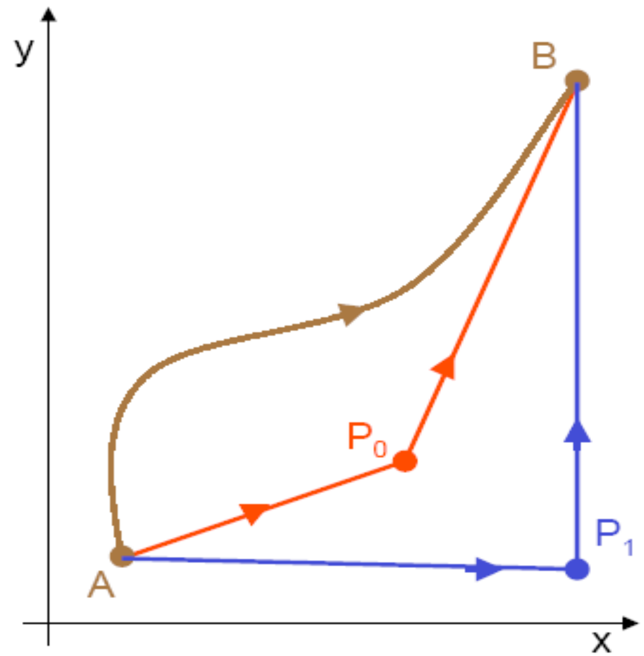
Energia potenziale

Se la forza è conservativa, il corpo "immagazzina" il lavoro sotto forma di energia potenziale, riutilizzabile per compiere altro lavoro.

- Si può definire una funzione energia potenziale U che dipende unicamente dalle coordinate spaziali, tale che:

$$L_{AB} = U(x_A) - U(x_B)$$

- L'energia potenziale U non è una grandezza direttamente misurabile. Solamente le differenze di energia potenziale ΔU hanno rilevanza in fisica. La scelta del punto di riferimento, rispetto a cui si calcola U, si cancella nelle differenze.



Esempio: 2 scelte

$U(x_0)=0$ o $U^*(x_1)=0$

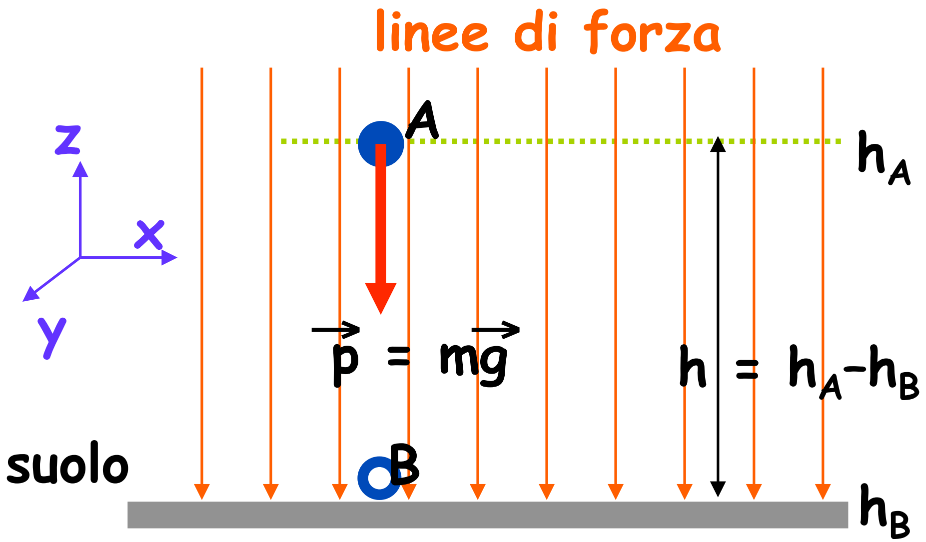
$U(x_A)-U(x_B) = L_{AB} = L_{A0} + L_{0B} =$
$= L_{A1} + L_{1B} = U^*(x_A)-U^*(x_B)$

Energia potenziale gravitazionale

Lavoro compiuto da/contro la forza peso
- nella caduta da A a B
- nel sollevamento da B a A

$\vec{F} = m\vec{g} \parallel s = h = h_A - h_B$

$\rightarrow L = mg \cdot (h_A - h_B)$



Energia potenziale gravitazionale:

$$U = mgh = mgh_A - mgh_B$$

Dipende solo dall'altezza h rispetto al suolo (coord.z), non dalle coord. orizzontali x e y

L'energia potenziale è relativa a un punto di riferimento arbitrario (dipende dal "dislivello" tra due punti, non dall'altezza assoluta)

Conservazione dell'energia meccanica

Energia meccanica = energia cinetica T + energia potenziale U

In generale, in un campo di forze conservative:

$$\left.\begin{array}{l} L = \Delta T = T_B - T_A \\ L = U_A - U_B \end{array}\right\} \rightarrow T_B - T_A = U_A - U_B \rightarrow T_A + U_A = T_B + U_B$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

In un campo di forze conservative
(es.moto senza attriti sotto l'azione della forza peso),
la **somma** dell'energia cinetica e potenziale rimane **costante**.

Moto di caduta dei gravi

Trascurando gli attriti, l'energia totale (meccanica) e' costante:

$$E_{tot} = T_{in} + U_{in} = T_{fin} + U_{fin}$$

all'inizio: $T_{in}=0$, $U_{in}=mgh$

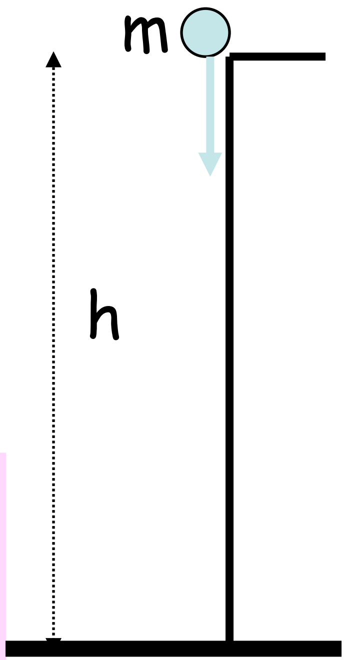
alla fine: $T_{fin}= \frac{1}{2}mv^2$, $U_{fin}=0$

$$E_{tot} = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

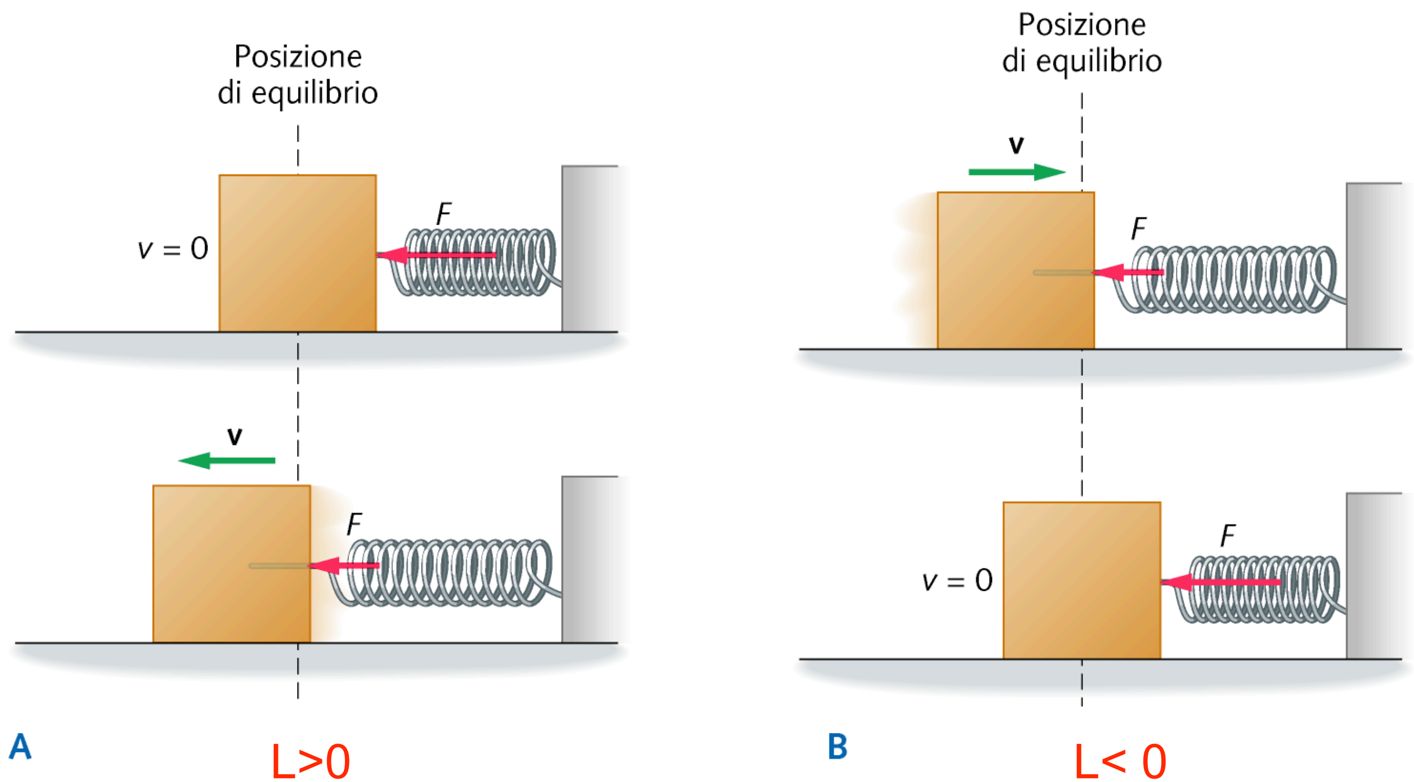
altezza iniziale $h = v^2/2g$

velocità finale $v = \sqrt{2gh}$

(indipendenti dalla massa)



Lavoro della forza elastica



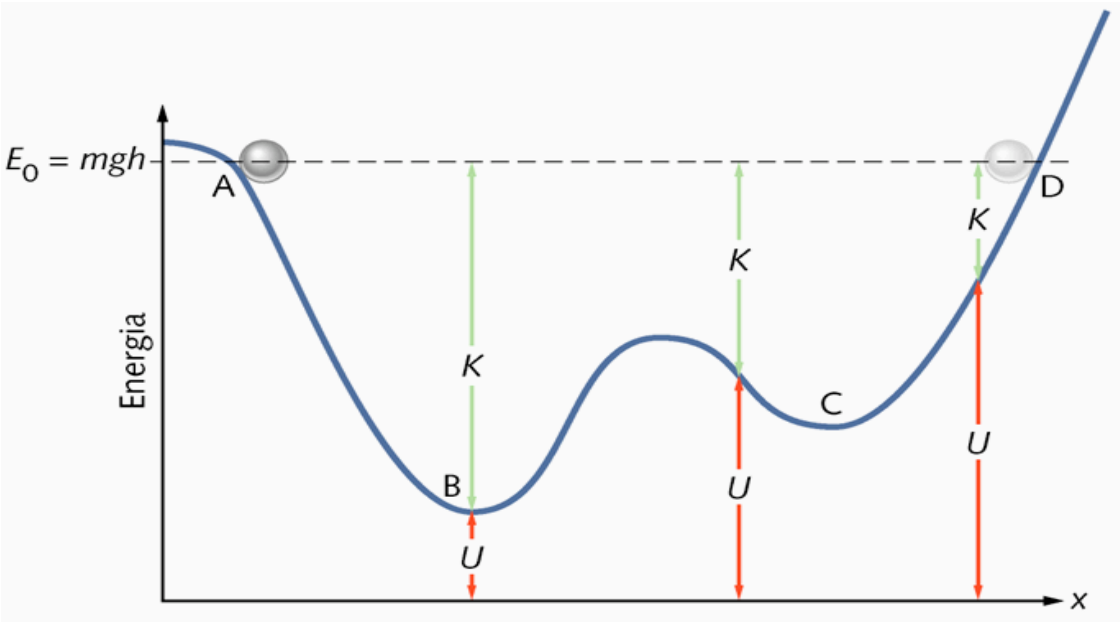
L>0

L< 0

La forza elastica è conservativa $\Rightarrow$ $\boxed{U = \frac{1}{2} k\, x^2}$

L'energia meccanica si conserva $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 = \text{costante}}$

Curve dell'energia potenziale

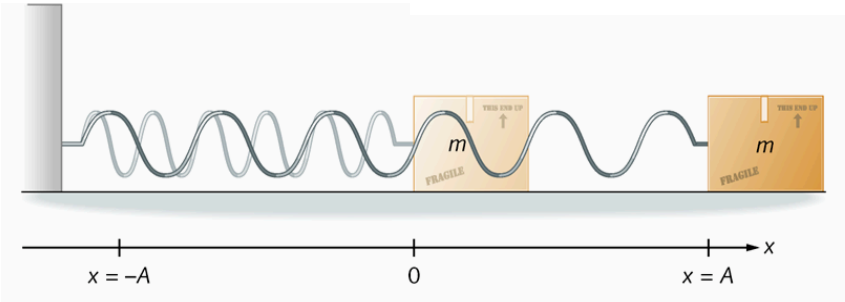


Energia potenziale gravitazionale

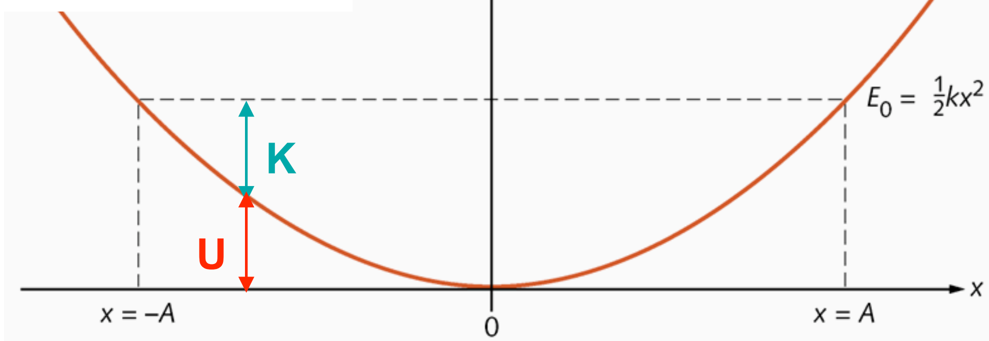
K+U = mgh

Energia potenziale elastica

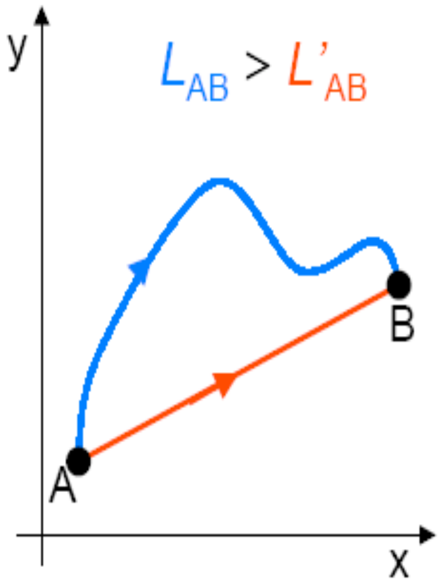
K + U = ½ k A²



A= massima elongazione della molla



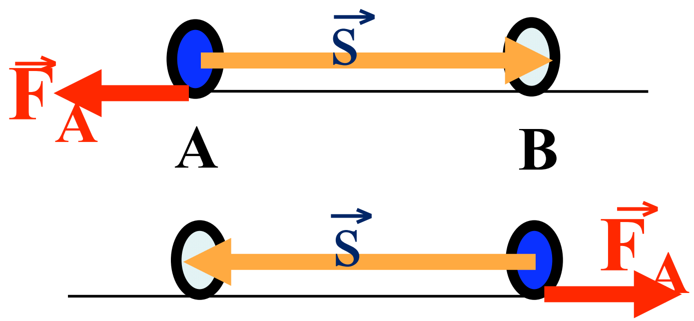
Forze dissipative



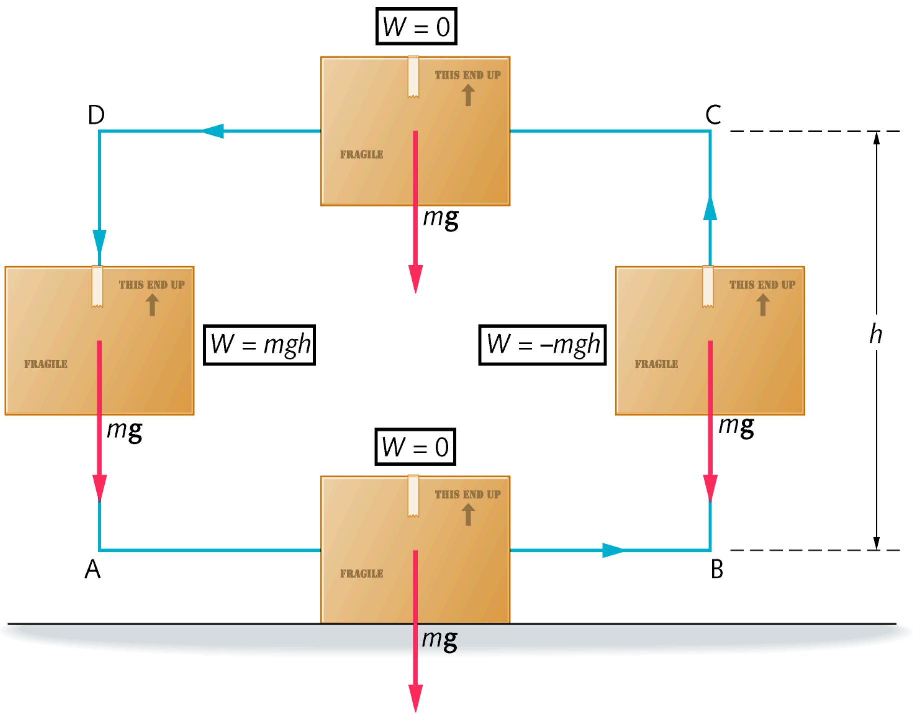
Se il lavoro dipende dal cammino seguito, viene perduto sotto forma di energia non riutilizzabile
(es. energia termica -calore- negli attriti)
e la forza è detta dissipativa.

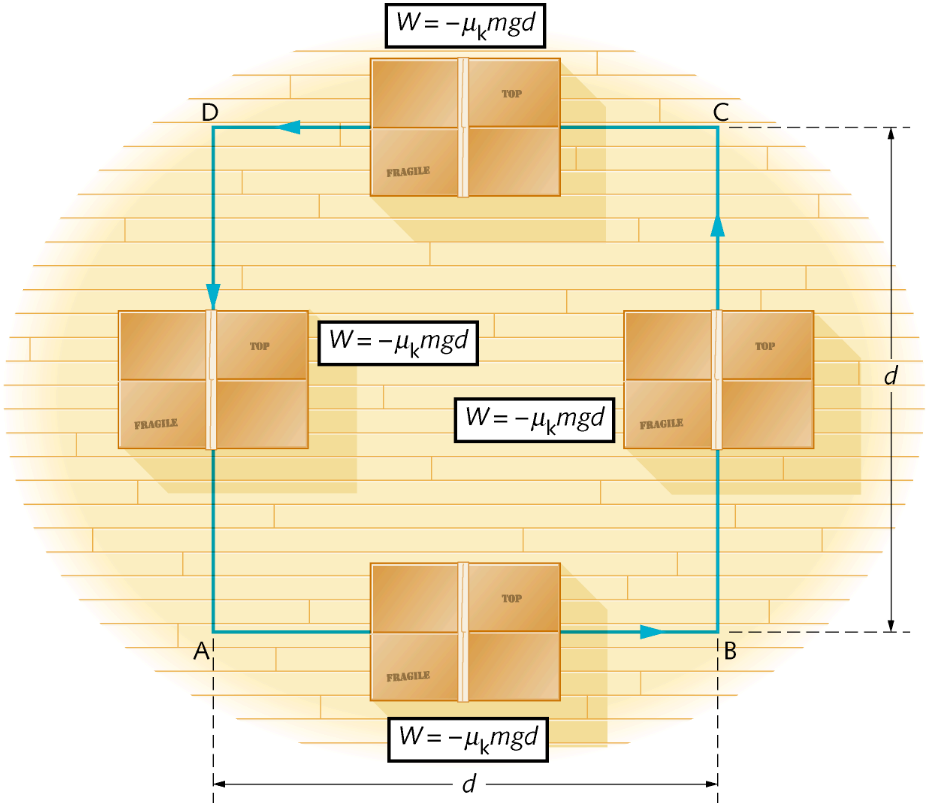
Es.

Lavoro delle forze di attrito
(sempre contrarie allo spostamento):
$L_{AB}\ (< 0) + L_{BA}\ (<0) = L_{tot} < 0$
sempre negativo (mai nullo)



Forze conservative vs. dissipative





Lavoro (W) compiuto dalla forza peso lungo un percorso chiuso:

$$W_{tot} = 0 - mgh + 0 + mgh = 0$$

Lavoro (W) compiuto da una forza di attrito lungo un percorso chiuso:

$$W_{tot} = -4\ \mu_k mgd \neq 0$$

Potenza

$$\text{potenza} = \frac{\text{lavoro compiuto}}{\text{tempo impiegato}}$$

$P = L/\Delta t$

$W = J/s$

watt

Una macchina e' tanto piu' "potente" quanto piu' riesce a fornire una certa prestazione nel minor tempo possibile

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F \cdot s}{\Delta t} = F \cdot v$$

→ Definizione equivalente:
Potenza = forza · velocità

MKS: watt
cgs: erg·s
pratico: hp=735 watt

kilowattora:
$1kWh = 1kW \cdot 1h = 10^3\ W \cdot 3600\ s = 3.6 \cdot 10^6\ J$
→ unità di lavoro, non di potenza

Rendimento di una macchina

$$\text{rendimento} = \frac{\text{lavoro utile prodotto}}{\text{energia totale impiegata}}$$

In presenza di attriti, una parte dell'energia fornita va dispersa sotto forma di calore e non puo' essere utilizzata per gli scopi richiesti.

$$\eta = (100\cdot)\ L/E_{tot}$$

%

adimensionale

$\eta < 1$ ($< 100\%$)

Es.

Rendimento del cuore: $\eta \approx$ 10-15 %

Processi biochimici → contrazione muscolare → produzione di energia potenziale chimica → Lavoro meccanico + calore

Esercizi svolti su lavoro ed energia

Esercizio n.1

Calcolare la potenza sviluppata da una persona di 80 kg che:
a) sale in 20 s un piano di scale di dislivello 3.66 m ;
b) corre i 100 m in 10 s partendo da ferma.

Soluzione

a) Il lavoro compiuto dalla persona è

$$L = mgh = 80\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m/s}^2 \times 3.66\ \text{m} = 2870\ \text{J}$$

La potenza sviluppata $P = L/t = 2870\ \text{J}/(20\ \text{s}) = 144\ \text{W}$

b) Calcoliamo la velocità media $v = 100\ \text{m}/(10\ \text{s}) = 10\ \text{m/s}$

Dal teorema delle forze vive $L = \frac{1}{2} m v^2 = 0.5 \times 80\ \text{kg} \times (10\ \text{m/s})^2 = 4000\ \text{J}$

$P = L/t = 4000\ \text{J}/(10\ \text{s}) = 400\ \text{W}$

Alcuni valori di potenza erogata:

Centrale elettrica	10^9 W
Auto di media cilindrata	7×10^4 W
Forno di casa	2000 W
Luce del sole che illumina 1m^2	1380 W
Frigorifero	615 W

Esercizio n.2

a) Trovare il lavoro necessario per portare un corpo di massa 2 kg dalla velocità di 2 m/s a quella di 5 m/s.
b) Trovare il lavoro necessario a fermare un corpo di massa 2 kg, che procede alla velocità di 8 m/s.

Soluzione

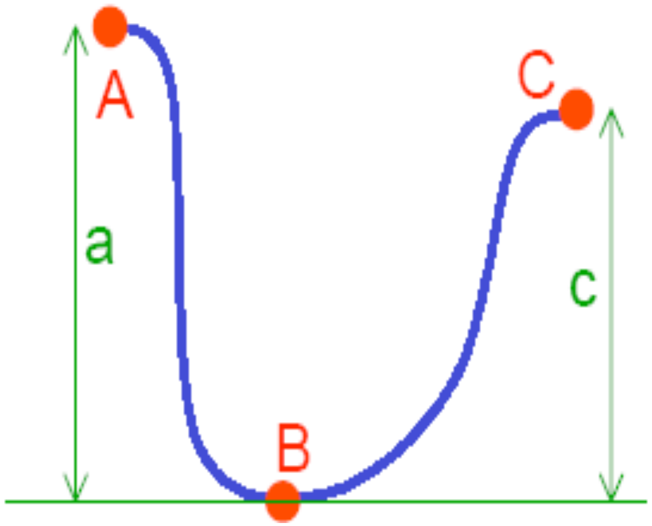
a) $L = ½\, m\, v_{fin}^2 - ½\, m\, v_{ini}^2 = 0.5 \times 2 \times (5^2 - 2^2) = 21\ J$

b) $L = ½\, m\, v_{fin}^2 - ½\, m\, v_{ini}^2 = 0.5 \times 2 \times (0 - 8^2) = -64\ J$

In questo caso il lavoro è negativo perché la forza ha verso opposto allo spostamento del corpo

Esercizio n.3

Un carrello di massa 100 kg compie il percorso indicato in figura, passando dal punto A al punto C. Nota la velocità iniziale (v_A=0) e le differenze di quota tra A e B (a=20 m) e tra C e B (c=18m), calcolare il valore dell'energia potenziale in A e della velocità in B e in C.



Soluzione

Scegliamo l'energia potenziale in B, $U_B = 0$. Si ha:

$U_A = mga$ $\quad$ $U_C = mgc$

Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica per i punti A e B:

$\frac{1}{2} m v_B^2 + U_B = \frac{1}{2} m v_A^2 + U_A$

$\frac{1}{2} m v_B^2 + 0 = 0 + mga$

$$v_B = \sqrt{2ga} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 20} = 19.8 \ \text{m/s}$$

Scriviamo ora l'equazione per i punti A e C:

$\frac{1}{2} m v_C^2 + U_C = \frac{1}{2} m v_A^2 + U_A$

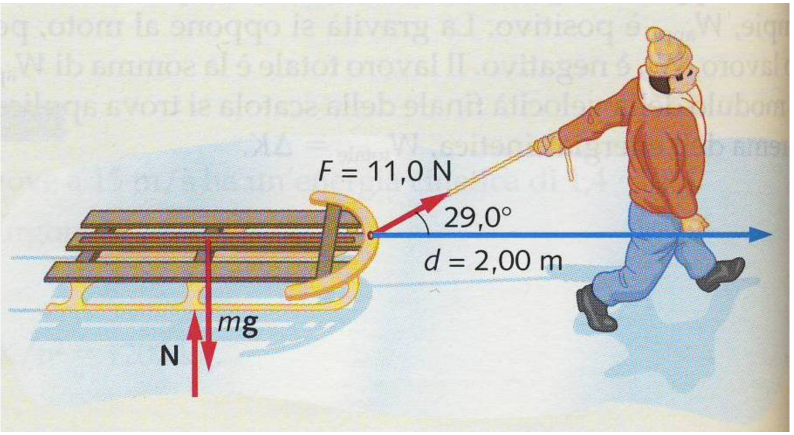
$\frac{1}{2} m v_C 2 + mgc = 0 + mga$

$$v_C = \sqrt{2g(a-c)} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 2} = 6.3 \ \text{m/s}$$

Esercizio n.4

Un ragazzo esercita una forza di 11,0 N inclinata di un angolo di 29,0° sopra l'orizzontale su una slitta di 6,40 kg.

▶ Trova il lavoro fatto dal ragazzo e la velocità finale della slitta dopo che questa ha percorso 2,00 m, sapendo che il modulo della velocità iniziale della slitta è 0,500 m/s e che questa scivola orizzontalmente senza attrito.



Soluzione

N.B. Le forze N e mg sono perpendicolari al moto e quindi NON compiono lavoro.

Solo F contribuisce al lavoro totale:

$L = Fd\cos(\theta) = 11 \times 2 \times \cos(29°)\ J = 19.2\ J$

La velocità finale della slitta si trova dal teorema delle forze vive:

$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = L \quad \Rightarrow$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,L_{totale}}{m} + v_i^2}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2(19{,}2\ \mathrm{J})}{6{,}40\ \mathrm{kg}} + (0{,}500\ \mathrm{m/s})^2} = 2{,}50\ \mathrm{m/s}$$

Esercizio n.5

Un corpo di massa 2 kg cade dall'altezza di 2 m su una molla di costante elastica 200 N/m. Di quanto si abbassa la molla ? Dopo un po', le oscillazioni si smorzano. Dove è il punto di riposo della molla ?

Soluzione

$$mg\,(h + d) = \tfrac{1}{2}\,k\,d^2 \Rightarrow k\,d^2 - 2mgd - 2mgh = 0 \Rightarrow$$

$$d = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)$$

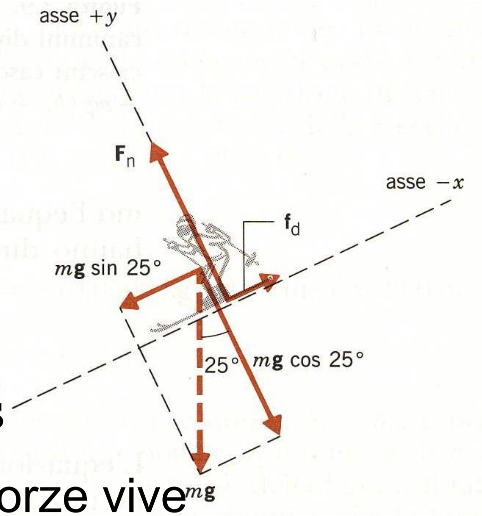
Scegliere segno + .
La soluzione –
non ha significato fisico

$$d = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right) = \frac{2 \times 9.8}{200}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 200 \times 2}{2 \times 9.8}}\right) = 0.73\,m$$

Il punto di riposo si ottiene da : $mg = kb \Rightarrow b = mg/k = 2 \times 9.8 / 200 = 9.8$ cm.

Esercizio n.6

Una sciatrice di massa 58 kg sta scendendo senza propulsione lungo un pendio di 25°. Alla sommità del pendio la sua velocità è 3.6 m/s . Determinare la velocità in un punto situato ad una quota di 57 m a valle, nel caso di attrito trascurabile e di attrito dinamico (μ_d = 0.1).



Soluzione

a) In assenza di attrito l'energia meccanica si conserva

$\frac{1}{2} mv_i^2 + U_i = \frac{1}{2} mv_f^2 + U_f$

Se scegliamo $U_f = 0$ a valle, allora $U_i = mgh$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gh} = \sqrt{3.6^2 + 2 \times 9.8 \times 57}\ \text{m/s} = 33.6\ \text{m/s}$$

b) In presenza di forze di attrito, applichiamo il teorema delle forze vive

$$L = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

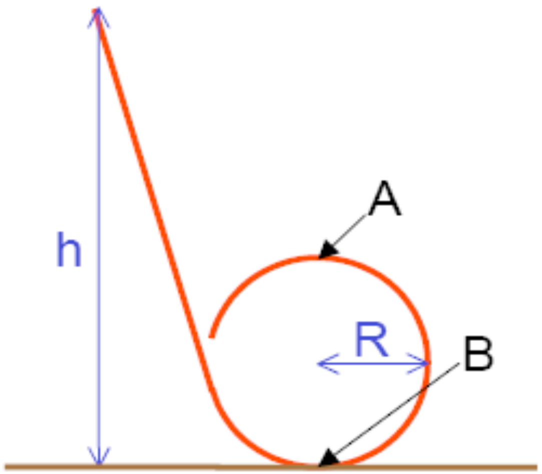
Ma L = [mg sin (θ) - mg cos(θ) μ_d] s = mgh - mg μ_d h / tan(θ) . Sostituendo:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gh[1 - \mu_d/\tan\theta]} = \sqrt{3.6^2 + 2 \times 9.8 \times 57 \times [1 - 0.1/\tan(25°)]}\text{m/s} = 29.8\ \text{m/s}$$

N.B. La differenza fra energia meccanica iniziale e finale è uguale al lavoro compiuto dalle forze dissipative

Esercizio n.7

Partendo da fermo, un motociclista compie il percorso indicato in figura, composto da un tratto in discesa e da una circonferenza di raggio 4 m. Trascurando gli attriti, trovare il valore minimo della quota *h*, affinché il percorso riesca. In tale ipotesi, trovare la velocità del motociclista nei punti più alto e più basso della circonferenza.



Soluzione

Scriviamo equazione di Newton nel punto A:

$$mv^2/r = mg + N$$

Per mantenere la traiettoria circolare l'accelerazione di gravità dovrà essere al massimo uguale alla accelerazione centripeta (in tal caso N=0), cioè:

$$v^2/r \geq g \quad \Rightarrow \quad v_{min} = (gr)^{1/2} = 6.3 \text{ m/s}$$

Dalla conservazione dell'energia:

$$mgh_{min} = m\,g\,2r + ½\,mv^2_{min} = mg2r + ½\,m\,gr = 5/2\,mgr \Rightarrow h_{min} = 5/2\,r = 10 \text{ m}$$

La velocità in B si ottiene da: $½\,mv^2_B = mgh \Rightarrow v_B = (2gh)^{1/2} = 14$ m/s