Cinematica

La cinematica studia il moto dei corpi in modo descrittivo, senza indagarne le cause.

- Cinematica = geometria analitica + evoluzione temporale.
- Moto in una (per cominciare) e più dimensioni

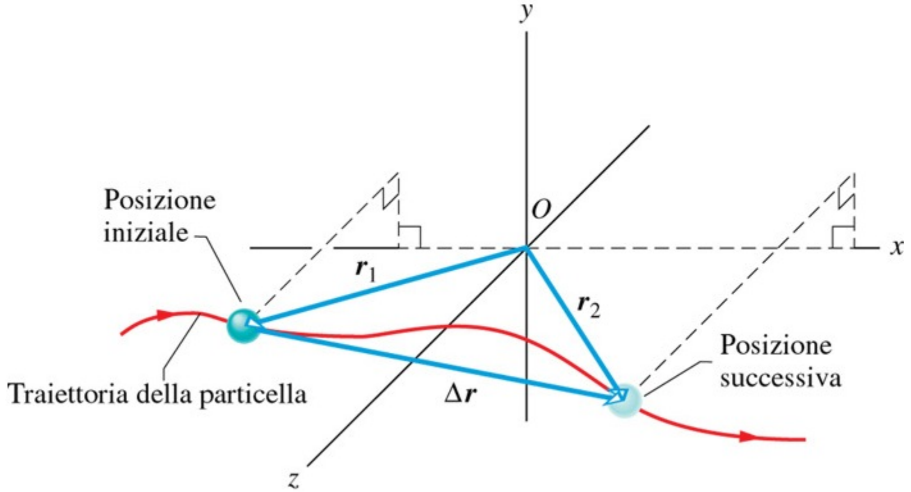
Spostamento
Legge oraria
Velocità
Accelerazione
Moti rettilinei: - uniforme
- uniformemente accelerato
Moti in due dimensioni: - moto di un proiettile
- circolare uniforme

Spazio e tempo

Ingredienti fondamentali:

Distanza → variazione di <u>lunghezza</u>
Durata → variazione di <u>tempo</u>

rispetto a una situazione iniziale fissa e nota
→ sistema di riferimento
→ condizioni iniziali ("punto di partenza")



il tempo e' un parametro fondamentale
e funge da variabile indipendente

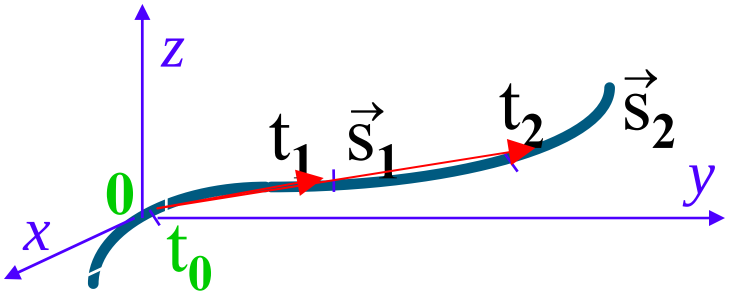
Spostamento

Per una descrizione completa:
quanta strada si percorre → modulo
quale strada si prende → direzione
verso dove si va → verso
da dove si parte → punto appl.

VETTORE

$\vec{s} = \vec{s}(t)$

Traiettoria =
linea descritta
dal corpo
durante il moto



$x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(y)$

unità di misura : metro (SI), centimetro (cgs)

Legge oraria

Relazione tra spazio percorso e tempo impiegato

$s = f(t)$ → $\Delta s = f(\Delta t)$

$t_1 \rightarrow s_1 = s(t_1)$

$t_2 \rightarrow s_2 = s(t_2)$

$\Delta s = s_2 - s_1 = s(t_2) - s(t_1)$

$\Delta t = t_2 - t_1$

variazione: $a_2 - a_1 = \Delta a$

(opposta a **differenza**: $a_1 - a_2 = -\Delta a$)

Moto rettilineo:	**Moto vario** (circolare, armonico, ...):
direz.moto = traiettoria	direz.moto = tangente alla traiettoria
descr.moto "media"	descr.moto "istantanea"

$$\text{velocità} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{intervallo di tempo}}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

$$\frac{m}{s}$$

definizione — *formula* — *unità di misura*

Velocità media: $$\vec{v}_m = \frac{\vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{s}_2 - \vec{s}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

SI	cgs	pratico
m/s	cm/s	km/h

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 0.28\frac{m}{s}$$

$$1\frac{m}{s} = \frac{0.001}{1/3600}\frac{km}{h} = 3.6\frac{km}{h}$$

Accelerazione

accelerazione = $\dfrac{\text{variazione di velocità}}{\text{intervallo di tempo}}$ $\quad \vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ $\quad \dfrac{m}{s^2}$

Accelerazione media: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Misura la rapidità di variazione della velocità:

a>0 (Δv>0) → acceleraz. *a<0 (Δv<0) → deceleraz. (frenamento)*

Attenzione: "alta velocità" non significa accelerazione!

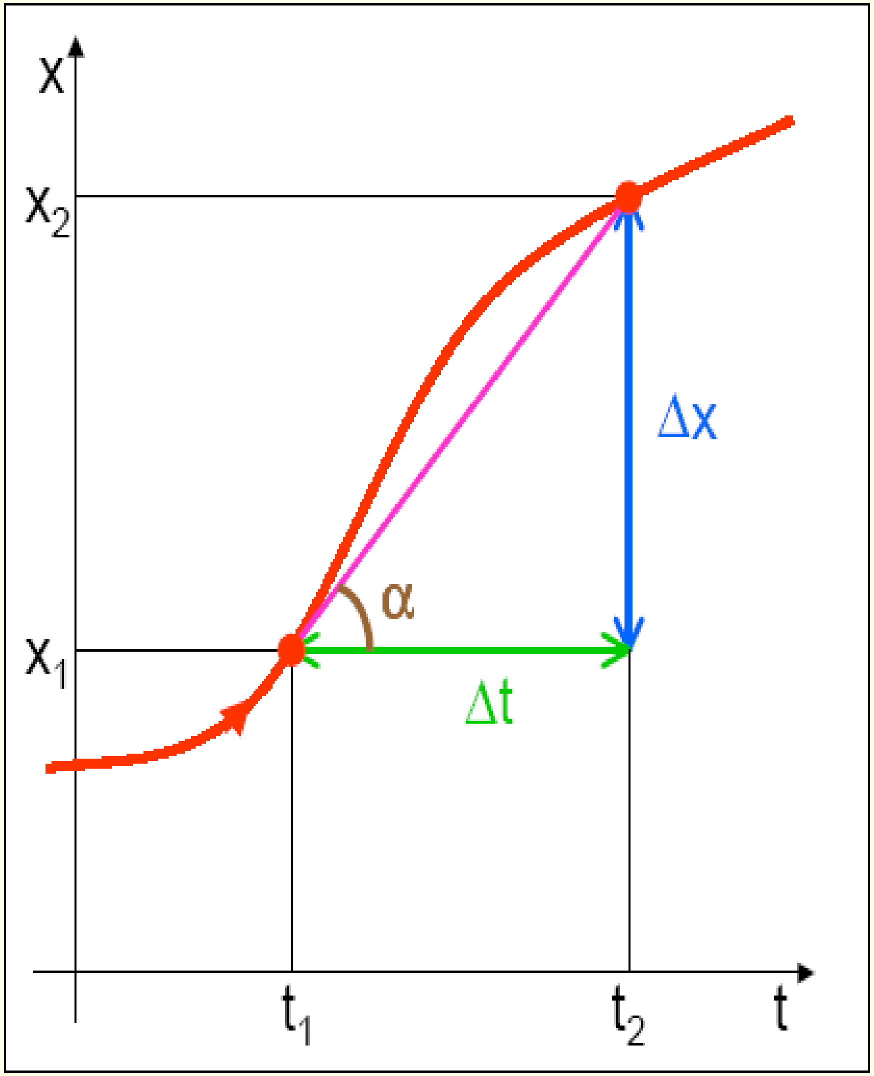
Es. auto da 0 a 100 km/h in 10 s →

a = Δv/Δt = [(100-0) km/h]/(10 s) = (27.78 m/s)/(10 s) = 2.78 m/s^2

Ma: viaggio a velocità costante di 100 km/h per 1 ora →

a = Δv/Δt = [(100-100) km/h]/(1 h) = (0 m/s)/(3600 s) = 0 m/s^2

Interpretazione geometrica della velocità istantanea



$v_{Media} = \Delta x / \Delta t \propto \tan(\alpha)$
è la pendenza del segmento — nel piano x-t;

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$, cioè il triangolo diviene più piccolo, ma α resta finito;
il segmento — approssima la tangente alla curva — .

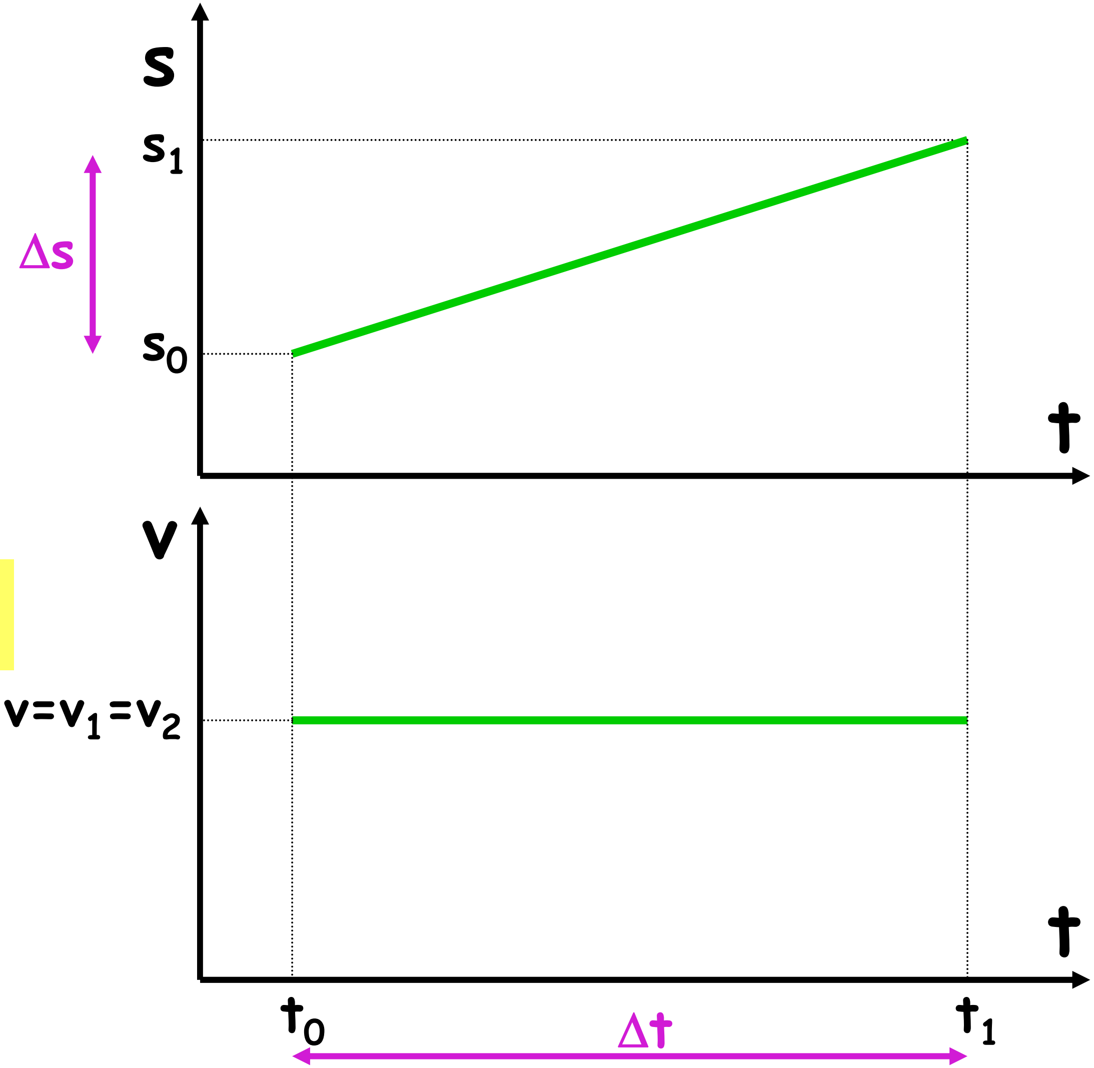
corrispondenza tra i concetti di "derivata", "pendenza", "tangente", "approssimazione lineare".

Moto rettilineo uniforme

Velocità costante:

$$v = \Delta s / \Delta t = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s_3 - s_2}{t_3 - t_2} = \ldots$$

= costante



Legge oraria:

$$\boxed{s = v_0 t + s_0}$$

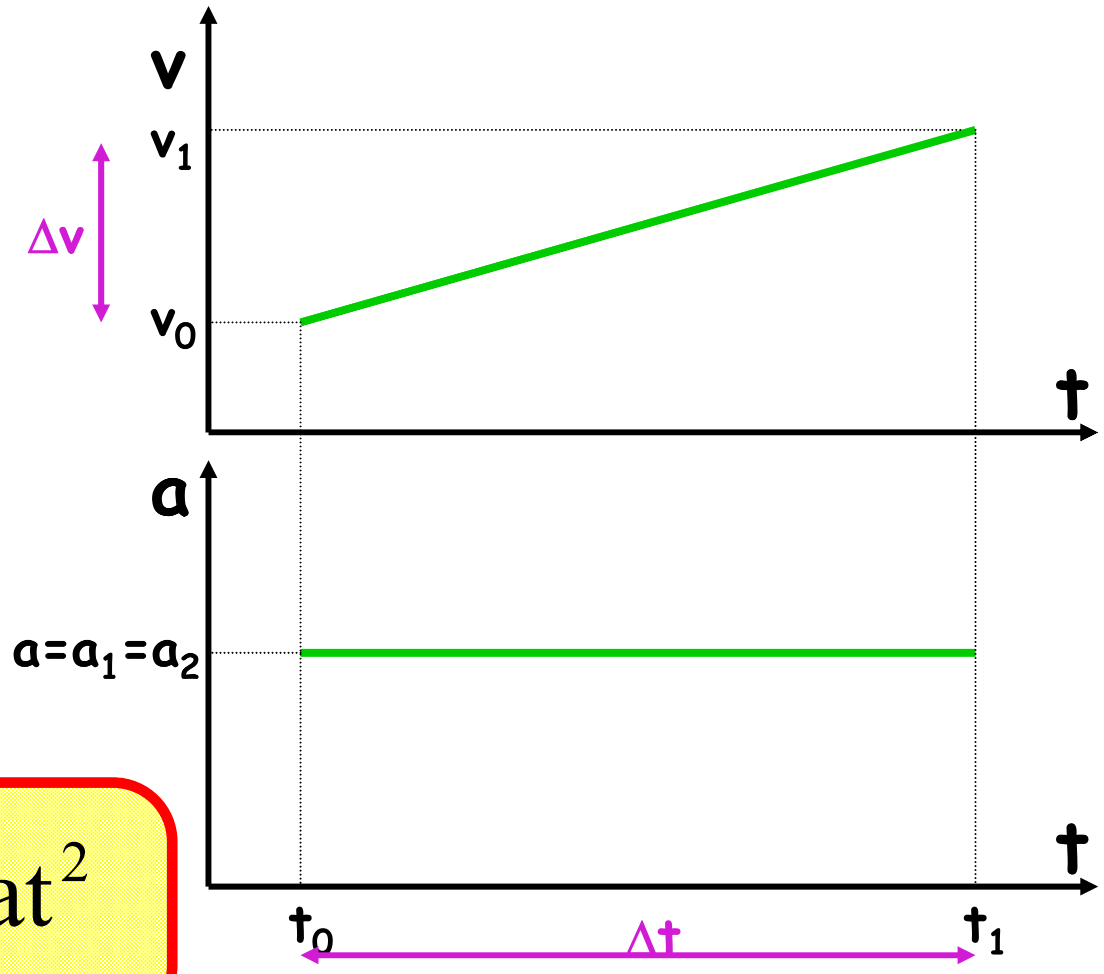
Moto rettilineo uniformemente accelerato

Accelerazione costante:

$$a = \Delta v / \Delta t = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \ldots$$

= costante

$$v = v_0 + at$$

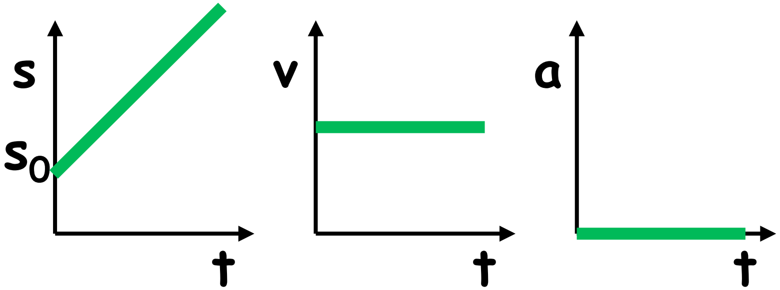


Legge oraria:

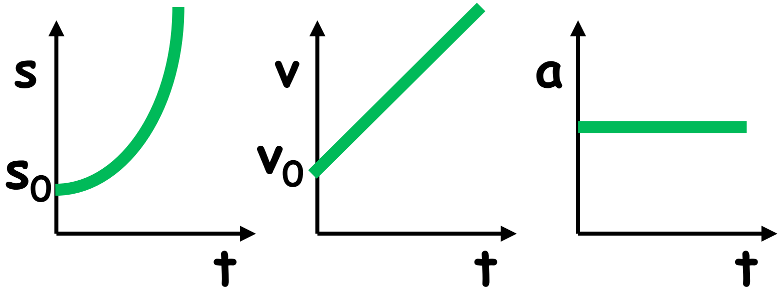
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Moti rettilinei: uniforme vs. uniformemente accelerato

UNIFORME	UNIFORMEMENTE ACCELERATO
$s = vt + s_0$	$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$
v = *costante*	$v = v_0 + at$
$a = 0$	a = *costante*



uniforme



uniformemente accelerato

Caduta dei gravi

moto uniformemente accelerato

$a = -g$ ← costante di gravità

↑ scelta del sistema di riferimento (verso l'alto)

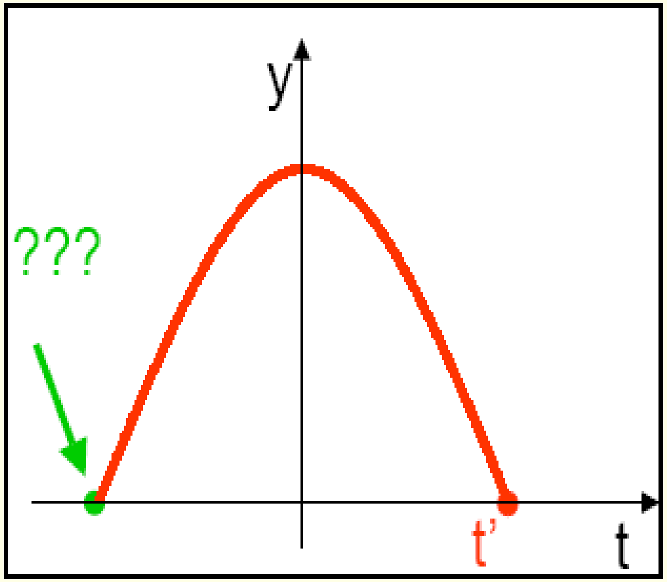
$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

se : $v_0 = 0$; $a = -g$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

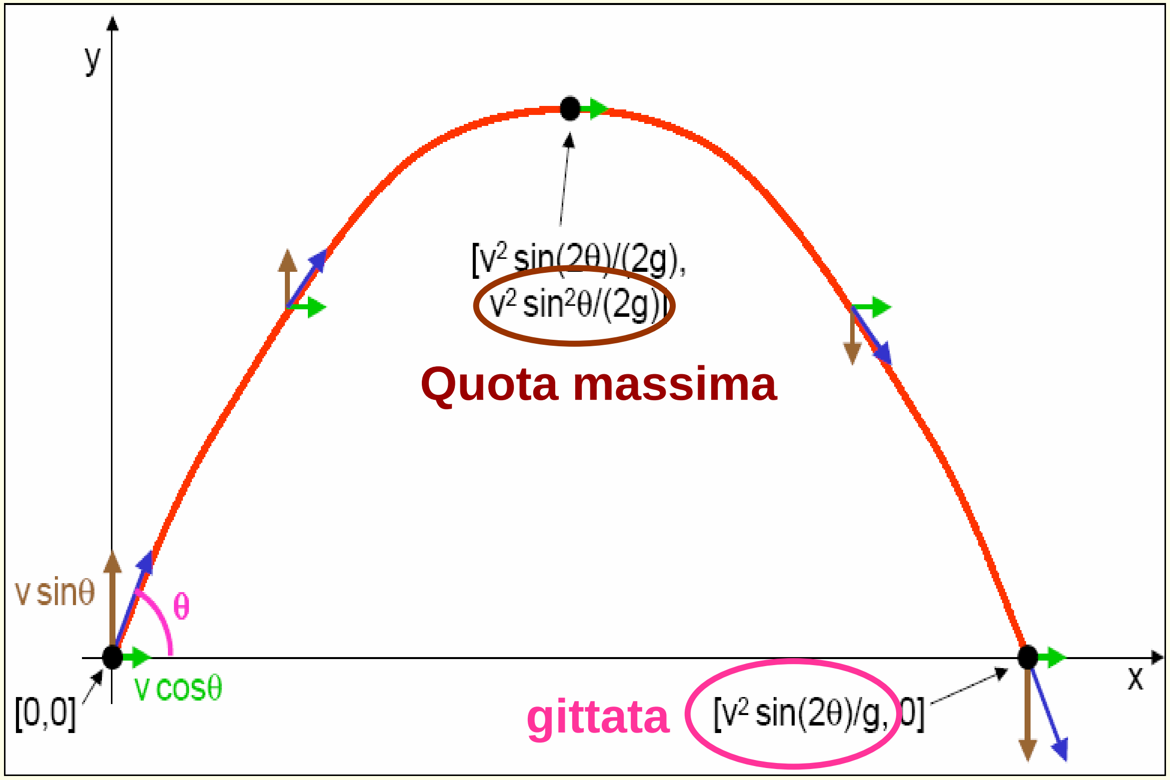
Ex. : trovare t' per cui $y(t') = 0$

$$y_0 - \frac{1}{2} g t'^2 = 0 \rightarrow t' = \pm\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$



Moto di un proiettile

Asse x	$x_0 = 0; \quad v_0^x = v \cdot \cos\vartheta; \quad a^x = 0$
Asse y	$y_0 = 0; \quad v_0^y = v \cdot \sin\vartheta; \quad a^y = -g$



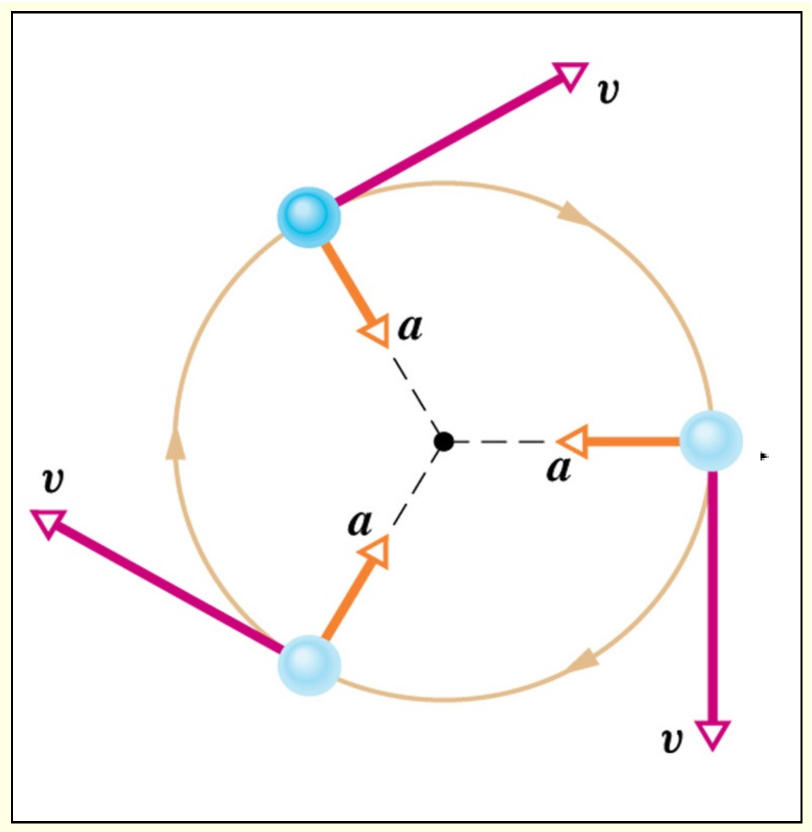
$$v^x = v_0^x = v\cos(\vartheta)$$

$$v^y = v_0^y - gt = v\sin(\vartheta) - gt$$

Legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = v \cdot \cos\vartheta \cdot t \\ y(t) = v \cdot \sin\vartheta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Moto circolare uniforme



$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ Velocità angolare $[s^{-1}]$

$$v = \omega R$$ Velocità tangenziale $[m][s^{-1}]$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$ Periodo del moto

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$ Accelerazione centripeta

- La velocità è tangente alla traiettoria e costante in modulo.
- Direzione e verso della velocità variano in ogni punto della circonferenza
- L'accelerazione è sempre diretta verso il centro (centripeta)

Esercizi svolti sulla cinematica

Esercizio n.1

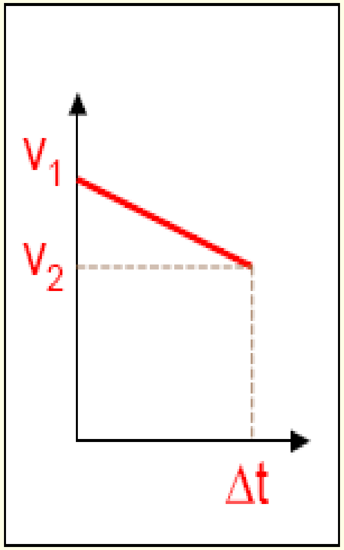
Esercizio – Un'automobile, durante una frenata uniforme, passa in un minuto dalla velocità di 40 Km/h a quella di 28 Km/h. Trovare il valore della accelerazione e lo spazio percorso.

Soluzione –

v_1 = 40 Km/h = 11.11 m/s; v_2 = 28 Km/h = 7.78 m/s;

a = $(v_2 - v_1) / \Delta t$ = (7.78 - 11.11) / 60 = - 0.055 m/s^2;

[quale è il significato del segno "-" ???]



s = 1/2 a $\Delta t^2 + v_1 \Delta t$ = - 0.5 · 0.055 · 60^2 + 11.11 · 60 = -100 + 666.6 = 566.6 m.

Esercizio n.2

Esercizio – Un'automobile viaggia a 120 Km/h. Visto un ostacolo, il conducente riesce a fermarsi in 110 m. Quale è l'accelerazione e quanto tempo impiega ?

Soluzione –

$v_0 = 120$ Km/h $= 33.3$ m/s;

$s = v_0 T - 1/2\, a T^2$; $\quad v_{fin} = 0 = v_0 - aT \quad \Rightarrow$

$T = v_0 / a$; $s = v_0^2 / a - 1/2\, v_0^2 / a = 1/2\, v_0^2 / a \quad \Rightarrow$

$a = v_0^2 / 2\, s = 33.3^2 / (2 \cdot 110) = 5.040 \text{ m} / \text{s}^2$;

$T = v_0 / a = 33.3 / 5.040 = 6.60$ sec.

Esercizio n.3

Esercizio [S 2.39] – In una gara sui 100 m, due atleti impiegano lo stesso tempo di 10.2 s. Il primo impiega 2 s in accelerazione costante, poi mantiene la velocità costante fino alla fine, mentre il secondo accelera per 3 s, poi mantiene la velocità costante. Determinare per ciascun concorrente l'accelerazione e la velocità massima.

Soluzione –

Primo concorrente :

$$\tfrac{1}{2} a_1 t_1^2 + a_1 t_1 (T - t_1) = s_{tot} \Rightarrow$$

$$a_1 = s_{tot} / (\tfrac{1}{2} t_1^2 + t_1 T - t_1^2) = s_{tot} / (t_1 T - \tfrac{1}{2} t_1^2) =$$

$$= 100 / (2 \cdot 10.2 - 0.5 \cdot 2^2) = 5.43 \text{ m/s}^2;$$

$$v_1 = a_1 t_1 = 5.43 \cdot 2 = 10.86 \text{ m/s};$$

Secondo concorrente :

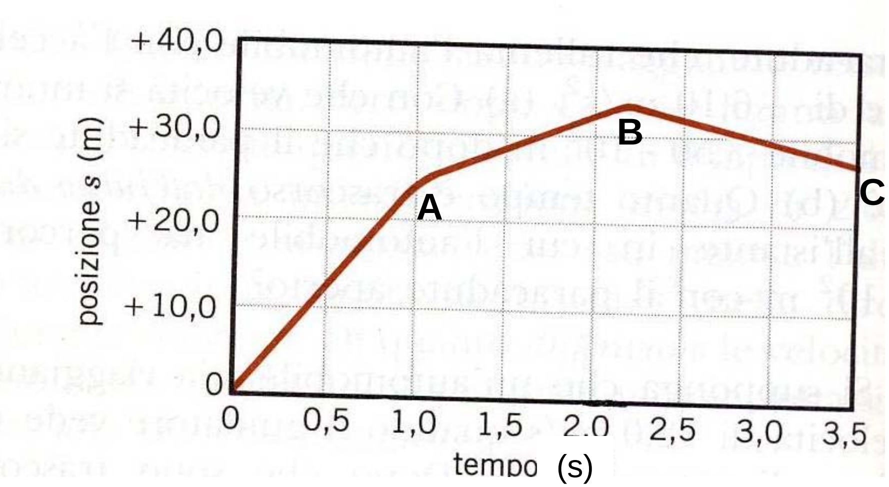
$$\tfrac{1}{2} a_2 t_2^2 + a_2 t_2 (T - t_2) = s_{tot} \Rightarrow$$

$$a_2 = s_{tot} / (\tfrac{1}{2} t_2^2 + t_2 T - t_2^2) = s_{tot} / (t_2 T - \tfrac{1}{2} t_2^2) =$$

$$= 100 / (3 \cdot 10.2 - 0.5 \cdot 3^2) = 3.83 \text{ m/s}^2;$$

$$v_2 = a_2 t_2 = 3.83 \cdot 3 = 11.5 \text{ m/s}.$$

Un autobus si muove secondo il diagramma orario di figura. Che tipo di moto descrive? Quanto vale la velocità media in ciascuno dei tre tratti?



Soluzione

Si tratta di 3 moti rettilinei uniformi con 3 velocità diverse. Nel tratto 0-A:

$$v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_A - v_0}{t_A - t_0} = \frac{25-0}{1.0-0}\,\text{m/s} = 25\,\text{m/s}$$

Tratto A-B

$$v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{35-25}{2.25-1.0}\,\text{m/s} = 8\,\text{m/s}$$

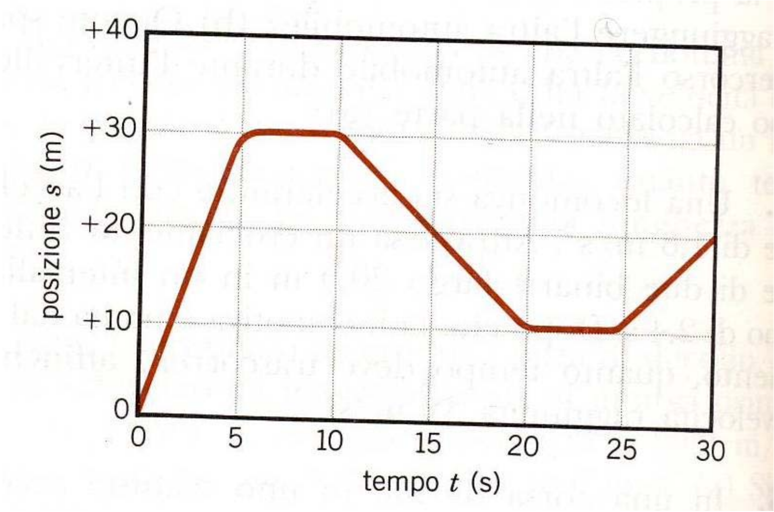
Tratto B-C

$$v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{28-35}{3.5-2.25}\,\text{m/s} = \text{-}\,5.6\,\text{m/s}$$

Il segno – indica che l'autobus torna indietro

Esercizio n.5

Usando il diagramma orario in figura costruire il corrispondente diagramma Della velocità un funzione del tempo.



Soluzione

0 s < t < 5 s moto rettilineo uniforme

$$v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_5 - v_0}{t_5 - t_0} = \frac{30-0}{5-0}\,\mathrm{m/s} = 6\,\mathrm{m/s}$$

5 s < t < 10 s fermo v=0

10 s < t < 20 s rettilineo unif.

$$v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{20} - v_{10}}{t_{20} - t_{10}} = \frac{10-30}{20-10}\,\mathrm{m/s} = -2\,\mathrm{m/s}$$

20 s < t < 25 s fermo v=0

25 s < t < 30 s rettilineo unif.

$$v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{30} - v_{25}}{t_{30} - t_{25}} = \frac{20-10}{30-25}\,\mathrm{m/s} = 2\,\mathrm{m/s}$$

Esercizio n.6

Esercizio – Una palla viene lanciata da terra verso l'alto con velocità iniziale di 12 m/s.

a) Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto della traiettoria ?

b) Quanto vale la distanza da terra del punto più alto ?

c) Dopo quanto tempo ricade a terra ?

d) Con che velocità la palla tocca terra ?

e) Quanto vale lo spazio totale percorso dalla palla ?

Soluzione –

a) $v_f - v_i = gt \Rightarrow t = (v_f - v_i) / g = (0 - 12) / (-9.8) = 1.24$ s;

b) $s = - 1/2\, g\, t^2 + v_i\, t = -0.5 \cdot 9.8 \cdot 1.24^2 + 12 \cdot 1.24 = 7.3$ m;

c) $t_2 = t$ [perché ???];

d) $v_{terra} = v_i = 12$ m/s [perché ???];

e) $s_{tot} = 2s = 14.6$ m.

Esercizio n.7

Esercizio – Un uomo lancia un sasso dal tetto di un palazzo verso l'alto, con una velocità di 12.25 m/s. Il sasso raggiunge il suolo dopo 4.25 s. Si calcoli :

a) l'altezza del palazzo;

b) la massima altezza raggiunta dal sasso;

c) la velocità con cui il sasso tocca il suolo.

Soluzione –

a) $y = h + v_o t - ½ gt^2$;

$y = 0 \Rightarrow h= ½ gt^2 - v_o t = 0.5·9.8·4.25^2 - 12.25·4.25 =36.4$ m;

b) $v(t) = v_o - gt$;

$v(t) = 0 \Rightarrow t^* = v_o/g$; $y_{max} = y(t^*) = h + v_o^2/g - ½ v_o^2/g = h + ½ v_o^2/g =$

$= 36.4 + 0.5 \cdot 12.25^2 \cdot / 9.8 = 44.1$ m;

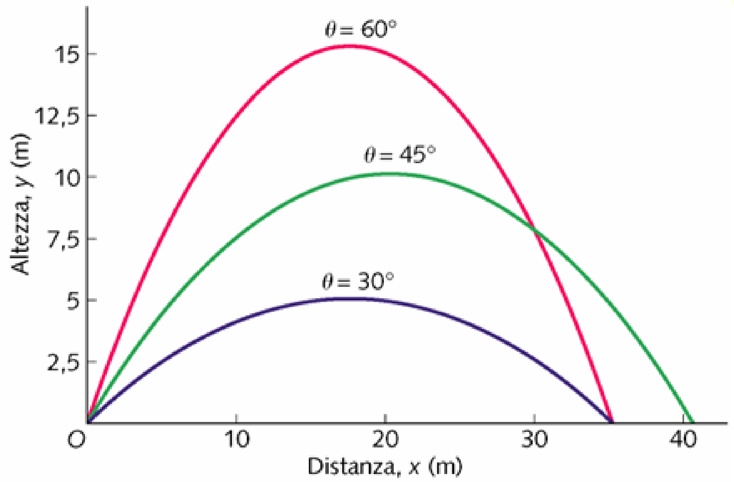
c) $v_{suolo} = v_o - gt_{suolo} = 12.25 - 9.8 \cdot 4.25 = -29.4$ m/s [che vuol dire "-" ?].

Esercizio n.8

Esercizio – Un cannone spara un proiettile alla velocità di 100 m/s ad un certo angolo con il piano orizzontale. Si calcoli l'angolo che causa la gittata massima e il valore della gittata. Si calcoli inoltre l'angolo necessario per colpire un bersaglio a 500 m di distanza.

Soluzione –

$$\begin{cases} x = vT\cos\vartheta \\ y = vT\sin\vartheta - \frac{1}{2}gT^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = x/(v\cos\vartheta) \\ y = x\tan\vartheta - \frac{1}{2}\dfrac{gx^2}{v^2\cos^2\vartheta}; \end{cases}$$



$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{2v^2\cos^2\vartheta}{g} = \frac{2v^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{g} = \frac{v^2\sin 2\vartheta}{g};$$

gittata max per $\sin(2\vartheta) = 1 \Rightarrow \vartheta = 45° \Rightarrow y_{max} = v^2/g = 1020$ m;

$d = v^2\sin(2\vartheta)/g \Rightarrow \quad \vartheta = \text{asin}(gd/v^2)/2 = \text{asin}(9.8\cdot 500/100^2)/2 = \text{asin}(0.49)/2 = 14°\ 40'\ 13''$

Esercizio n.9

Esercizio – Trovare la velocità angolare nei seguenti casi :

a) la Terra che ruota attorno al Sole (supporre il moto circolare uniforme);

b) la Terra che ruota attorno a se stessa;

c) la lancetta delle ore;

d) la lancetta dei minuti;

e) la lancetta dei secondi.

Soluzione –

a) $\omega_1 = 2\pi / T_1 = 2\pi / (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) = 1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s;

b) $\omega_2 = 2\pi / T_2 = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/s;

c) $\omega_3 = 2\pi / T_3 = 2\pi / (12 \cdot 60 \cdot 60) = 1.45 \cdot 10^{-4}$ rad/s;

d) $\omega_4 = 2\pi / T_4 = 2\pi / (60 \cdot 60) = 1.7 \cdot 10^{-3}$ rad/s;

e) $\omega_5 = 2\pi / T_5 = 2\pi / 60 = 0.104$ rad/s.

Esercizio n.10

Esercizio – Determinare la velocità e la velocità angolare che deve mantenere un aeroplano all'equatore affinché il sole appaia fisso all'orizzonte. L'aereo deve volare verso est o verso ovest ?

Soluzione –

$\omega_{aereo} = - \omega_{Terra} = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/sec (vedi esercizio precedente);

il segno "-" significa che l'aereo deve andare da est verso ovest;

$v_{aereo} = \omega \cdot r_{Terra} = 7.27 \cdot 10^{-5} \cdot 6.37 \cdot 10^{6} = 463$ m/s $= 1670$ Km/h.