I VETTORI

Definizione
Componenti e modulo
Somma e differenza
Prodotto scalare
Prodotto vettoriale
Versori

Grandezze scalari e vettoriali

Per una **descrizione completa** del fenomeno sono **necessari e sufficienti**

Grandezze scalari

1 informazione:

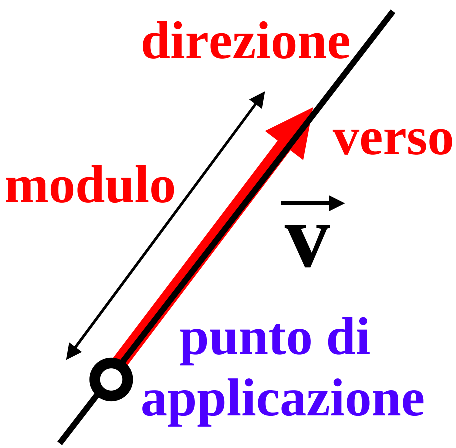
- *modulo = numero (risultato misura)*

Es. Massa = 10 kg

Grandezze vettoriali

4 informazioni:

- *modulo = numero (risultato misura)*
- *direzione*
- *verso*
- *punto di applicazione*



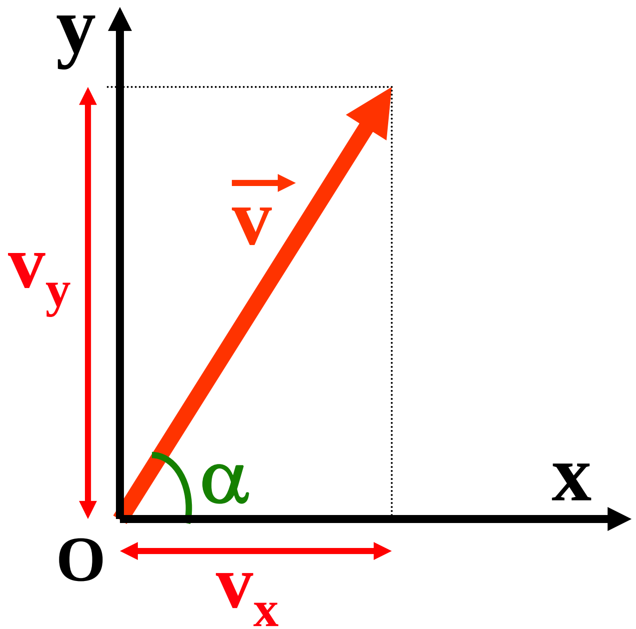
Es. Spostamento = 10 km
in **direzione** nord-sud
verso nord
partendo da Siena

Vettori: componenti e modulo

Un vettore è univocamente descritto
nel piano 2dim dalle sue 2 componenti
nello spazio 3dim dalle sue 3 componenti

… nel solito modo… (v. Matematica: Sistemi di riferimento e Funzioni trigonometriche)

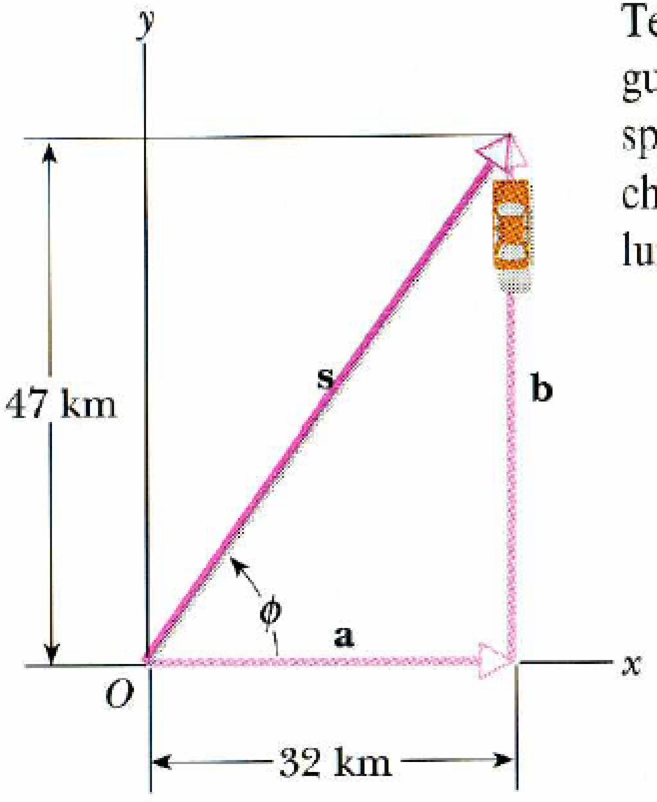
$$v_x = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$
$$v_y = |\vec{v}| \cdot \mathrm{sen}(\alpha)$$



$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2$$ **modulo**

$$= |\vec{v}|^2 \cdot [\mathrm{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)] = |\vec{v}|^2 \cdot 1$$

Problema 2 Un'automobile viaggia verso est per 32 km. Quindi, prima di fermarsi, verso nord per altri 47 km. Determinare lo spostamento risultante.



Soluzione Scegliamo un sistema di coordinate fisso rispetto alla Terra con l'asse x diretto verso est e l'asse y verso nord. Nella figura sono stati indicati i due successivi spostamenti **a** e **b**. Lo spostamento risultante **s** è ottenuto dalla somma **s** = **a** + **b**. Poiché **b** non ha componente lungo l'asse x e **a** non ha componente lungo l'asse y, otteniamo:

$$s_x = a_x + b_x = 32 \text{ km} + 0 = 32 \text{ km},$$

$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47 \text{ km} = 47 \text{ km}.$$

ESEMPIO 1.5

Un vettore spostamento **s** ha il modulo $s = 175$ m ed è diretto e orientato secondo un angolo di 50,0° rispetto all'asse x nella figura 1.15. Si trovino i componenti x e y di questo vettore.

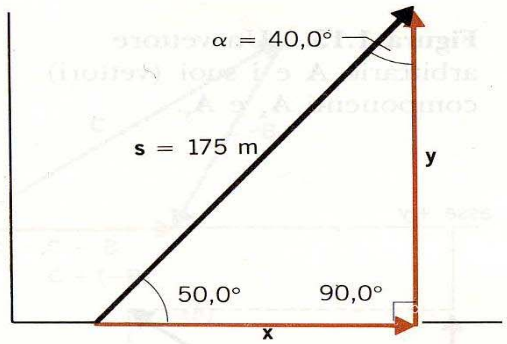


Figura 1.15. I componenti x e y del vettore spostamento **s** si possono trovare usando la trigonometria.

Risoluzione 1

Il modulo del componente y si può ottenere usando l'angolo di 50,0° e la definizione di sin θ espressa nell'equazione (1.1):

$$\sin 50{,}0° = \frac{y}{s}$$

$$y = s \sin 50{,}0° = (175\ \text{m})(\sin 50{,}0°) = \boxed{134\ \text{m}}$$

In modo analogo, si può ottenere il modulo del componente x usando l'angolo di 50,0° e la definizione di cos θ espressa nell'equazione (1.2):

$$\cos 50{,}0° = \frac{x}{s}$$

$$x = s \cos 50{,}0° = (175\ \text{m})(\cos 50{,}0°) = \boxed{112\ \text{m}}$$

Risoluzione 2

Per trovare i componenti x e y non è necessario usare l'angolo di 50,0°. Si può usare anche l'angolo α indicato nella figura 1.15. Poiché $\alpha + 50{,}0° = 90{,}0°$, ne consegue che $\alpha = 40{,}0°$. La risoluzione che usa α procede in modo diverso da quella che usa l'angolo di 50,0°, ma fornisce gli stessi risultati a cui arriva la risoluzione 1.

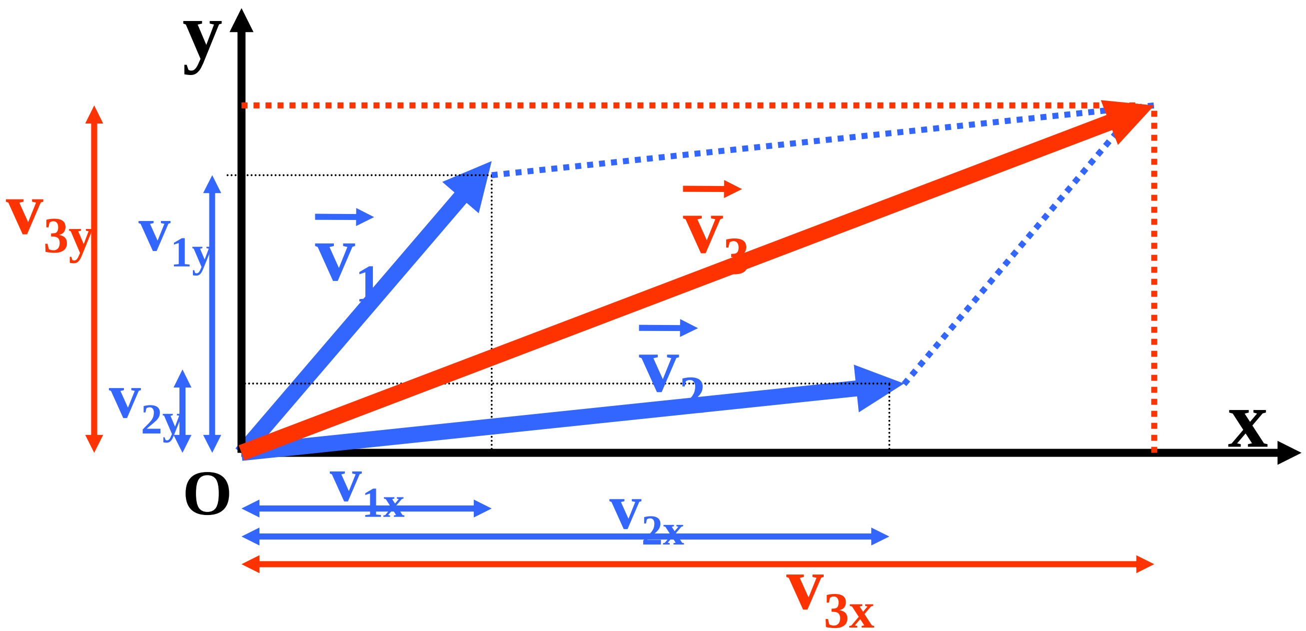
$$\cos 40{,}0° = \frac{y}{s}$$

$$y = s \cos 40{,}0° = (175\ \text{m})(\cos 40{,}0°) = \boxed{134\ \text{m}}$$

$$\sin 40{,}0° = \frac{x}{s}$$

$$x = s \sin 40{,}0° = (175\ \text{m})(\sin 40{,}0°) = \boxed{112\ \text{m}}$$

Somma di vettori



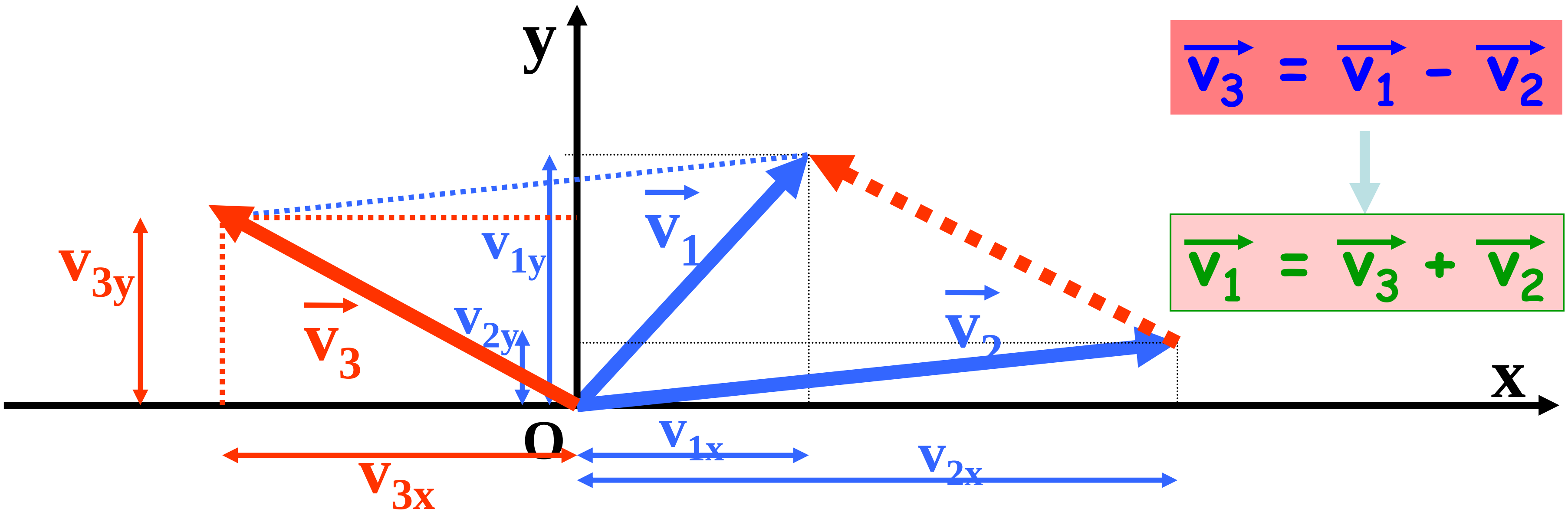
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Metodo grafico:
diagonale del parallelogrammo costruito sui vettori di partenza

Componenti:
somma delle componenti dei vettori di partenza

$$v_{3x} = v_{1x} + v_{2x}$$
$$v_{3y} = v_{1y} + v_{2y}$$

Differenza di vettori



$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2$$

Metodo grafico:

"altra" diagonale del parallelogrammo costruito sui vettori di partenza

Componenti:

differenza delle componenti dei vettori di partenza

$$v_{3x} = v_{1x} - v_{2x}$$
$$v_{3y} = v_{1y} - v_{2y}$$

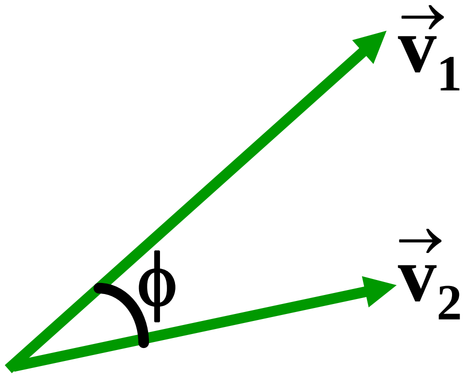
“Moltiplicazioni” di vettori

Oltre alla somma e alla differenza
si possono definire 2 altre operazioni tra vettori,
chiamate prodotti
ma non corrispondenti
alla consueta idea di moltiplicazione.

Prodotto scalare di 2 vettori:
il risultato è uno **scalare**, non più un vettore

Prodotto vettoriale di 2 vettori:
il risultato è ancora un **vettore**

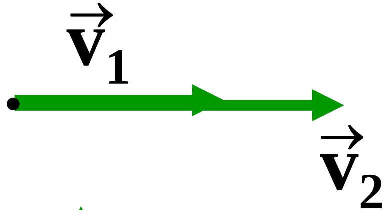
Prodotto scalare



$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \, v_2 \, \cos\phi$$

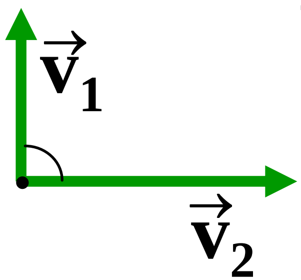
$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = v_{1x} \, v_{2x} + v_{1y} \, v_{2y}$$

$\phi = 0°$



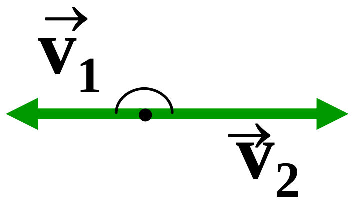
- $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = v_1 v_2 \underbrace{\cos\phi}_{+1} = v_1 v_2$

$\phi = 90°$



- $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = v_1 v_2 \underbrace{\cos\phi}_{0} = 0$

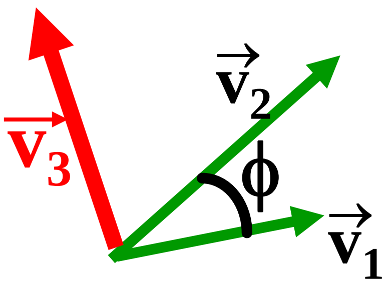
$\phi = 180°$

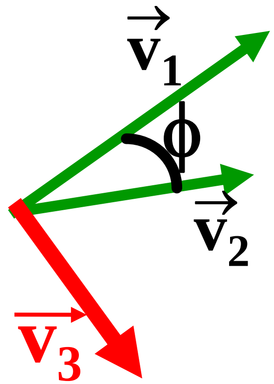


- $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = v_1 v_2 \underbrace{\cos\phi}_{-1} = -\, v_1 v_2$

il risultato
è un numero,
non un vettore!

Prodotto vettoriale





$$\boxed{|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1\, v_2\ \text{sen}\,\phi}$$

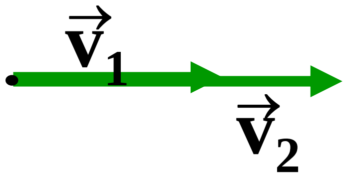
direzione $\perp$ ai 2 vettori

verso di avanzamento di una vite

sovrapponendo v_1 a v_2 (e non viceversa!)

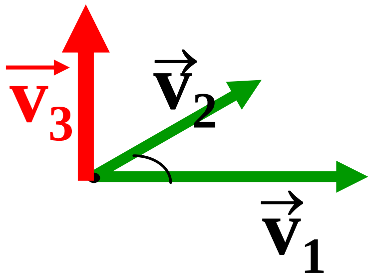
(pollice mano destra)

$\phi = 0°$



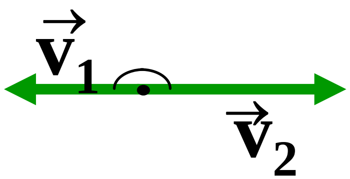
• $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \underbrace{\text{sen}\,\phi}_{0} = 0$

$\phi = 90°$



• $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \underbrace{\text{sen}\,\phi}_{+1} = v_1 v_2$

$\phi = 180°$



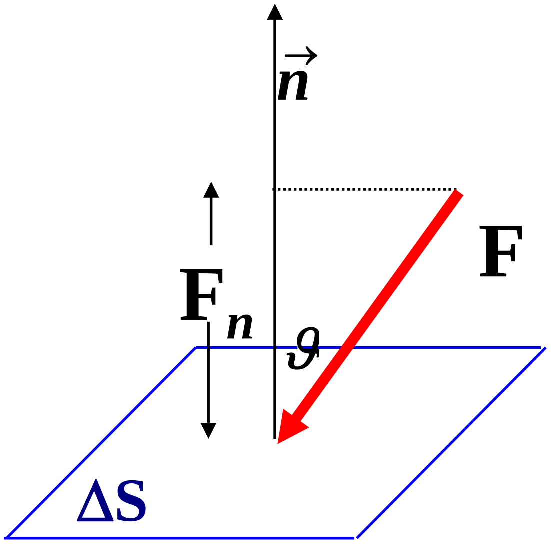
• $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \underbrace{\text{sen}\,\phi}_{0} = 0$

il risultato è un vettore, non un numero!

Versori

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

- modulo = 1
- direzione $\vec{v}$
- verso $\vec{v}$



Es.

Def. di pressione:

componente di una forza perpendicolare a una superficie

$F_n = F\cos\vartheta = \vec{F}\cdot\vec{n}$ **(prodotto scalare)**

E' un metodo comodo per tener conto di una direzione precisa senza alterare – grazie al modulo unitario del versore – il valore numerico della grandezza in esame.