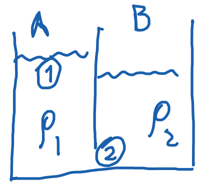
Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2019/20
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 24/9/2020

1) Un recipiente aperto è diviso da una parete in due parti uguali. Nella parte A è contenuto un liquido di densità $\rho_1 = 1.25$ g/cm^3 fino ad una quota $h_1 = 120$ cm. Nella parte B si trova un liquido, non miscibile con il primo, di densità $\rho_2 = 1$ g/cm^3 fino ad una quota $h_2 = 90$ cm. Alla base della parete di separazione si apre un foro sufficientemente piccolo, così che le due parti del recipiente possono comunicare.
Calcolare:
a) la velocità con cui inizia l'efflusso del liquido di A in B;
b) la quota delle superfici libere dei liquidi rispetto alla base alla fine del processo di efflusso.

2) Ad una massa m = 1 kg di aria (peso molecolare 29 g/mole), che inizialmente si trova alla temperatura $T_1 = 0$ °C e alla pressione $p_1 = 1$ atm, si fa descrivere il seguente ciclo reversibile;
1) compressione adiabatica da p_1 a $p_2 = 20$ atm;
2) riscaldamento a pressione costante durante il quale vengono forniti Q = 200 kcal;
3) espansione adiabatica fino al volume iniziale;
4) raffreddamento a volume costante fino alla pressione iniziale.

Considerando l'aria come un gas perfetto biatomico, calcolare;
a) le coordinate dei vertici del ciclo e le rispettive temperature;
b) la quantità di lavoro ottenuto;
c) il rendimento;
d) le variazioni di entropia nelle differenti trasformazioni.

SOLUZIONI



1) a) Applichiamo il teorema di Bernoulli fra il punto 1 superficie libera del liquido ρ_1 e il punto 2 foro di uscita

$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_1 v_2^2$$

p_2 è la pressione idrostatica alla base di B, quando inizia l'efflusso del liquido in A nel vaso B

$$p_2 = p_{atm} + \rho_2 g h_2$$

Dall'equazione di continuità $S_A v_1 = S_2 v_2$
dove S_A è la sezione del vaso A, S_2 la sezione del foro

Poiché $S_A \gg S_2 \Rightarrow v_1 \simeq 0$.

Sostituendo

$$\cancel{p_{atm}} + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + \frac{1}{2}\rho_1 v_2^2 + \cancel{p_{atm}}$$

$$v_2 = \left[\frac{2g(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)}{\rho_1}\right]^{1/2} = \left[2 \cdot 9.8 \cdot \frac{(1.25 \cdot 10^3 \cdot 1.2 - 10^3 \cdot 0.9)}{1.25 \cdot 10^3}\right]^{1/2} = 3{,}07\ m/s$$

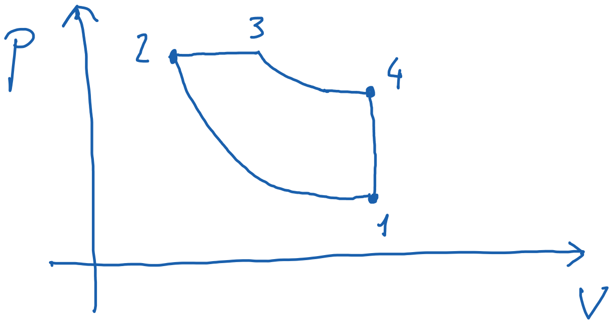
b) Alla fine del processo una parte del liquido ρ_1 si troverà in B.
All'equilibrio la pressione all'altezza del foro nel vaso A è uguale a quella nel vaso B.
Indicando con x l'altezza del liquido ρ_1 in A $\Rightarrow h_1 - x$ è l'altezza di ρ_1 in B, essendo i 2 vasi uguali

$$p_A = \rho_1 \cancel{g} x = p_B = \rho_1 \cancel{g}(h_1 - x) + \rho_2 \cancel{g} h_2$$

$$x = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{2\rho_1} = 0.96\ m$$

L'altezza del liquido in A è x, in B $h_2 + h_1 - x = 1.14\ m$

2)



$n = \frac{m}{29} = \frac{1000\,g}{29\,g} = 34.5$ moli di gas perfetto biatomico

$c_v = \frac{5}{2} R \qquad c_p = \frac{7}{2} R \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 7/5$

$p_1 = 10^5\,Pa \quad T_1 = 273\ K \qquad V_1 = \frac{n R T_1}{p_1} = 0.783\ m^3$

$p_2 = 2 \cdot 10^6\ Pa \qquad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$

$$V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{1}{20}\right)^{5/7} \cdot V_1 = 0.092\ m^3$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{n R} = 642.8\ K$$

$2 \rightarrow 3$ isobara $\qquad Q_{23} = 200\ kcal = 8.372 \cdot 10^5\ J$

$$Q_{23} = n c_p (T_3 - T_2)$$

$$T_3 = \frac{Q_{23}}{n c_p} + T_2 = \frac{8.372 \cdot 10^5}{34.5 \cdot \frac{7}{2} 8.31} + 642.8 = 1477.1\ K$$

$$p_3 = p_2 = 2 \cdot 10^6\ Pa$$

$$V_3 = \frac{n R T_3}{p_3} = 0.212\ m^3$$

$3 \rightarrow 4$ adiab. rev.

$4 \rightarrow 1$ isocora rev $\Longrightarrow V_4 = V_1$

$3 \to 4$ $\qquad p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma$

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma = 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{0{,}212}{0.783}\right)^{7/5} = 3{,}2 \cdot 10^5 \ \text{Pa}$$

$4 \to 1$ $\qquad \frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1} \qquad T_4 = \frac{P_4}{P_1} T_1 = \frac{3.2 \cdot \cancel{10}^5}{\cancel{10^5}} 273 = 873.6 \ K$

Calcoliamo ora $\mathcal{L}$ e Q in ogni trasf.

$Q_{12} = 0 \qquad \mathcal{L}_{12} = -\Delta U_{12} = -n c_v (T_2 - T_1)$

$Q_{23} = 200 \text{ kcal} \qquad \mathcal{L}_{23} = Q_{23} - \Delta U_{23} = n(c_p - c_v)(T_3 - T_2) =$

$= nR \,(T_3 - T_2)$

$Q_{34} = 0 \qquad \mathcal{L}_{34} = -\Delta U_{34} = -n c_v (T_4 - T_3)$

$\mathcal{L}_{41} = 0 \qquad Q_{41} = \Delta U_{41} = n c_v (T_1 - T_4) \quad < 0$

$$\mathcal{L}_{TOT} = -n\tfrac{5}{2}R(T_2 - T_1) + nR(T_3 - T_2) - n\tfrac{5}{2}R(T_4 - T_3)$$

$$= nR\left(-\tfrac{5}{2}T_2 + \tfrac{5}{2}T_1 + T_3 - T_2 - \tfrac{5}{2}T_4 + \tfrac{5}{2}T_3\right)$$

$$= nR\left(-\tfrac{7}{2}T_2 + \tfrac{5}{2}T_1 + \tfrac{7}{2}T_3 - \tfrac{5}{2}T_4\right)$$

$$= 34{,}5 \cdot 8{,}31 \left(-\tfrac{7}{2} 642.8 + \tfrac{5}{2} \cdot 273 + \tfrac{7}{2} \cdot 1477{,}1 - \tfrac{5}{2} 873.6\right) =$$

$$= 34.5 \cdot 8.31 \cdot (-2249{,}8 + 682.5 + 5169.85 - 2184) =$$

$$= 4{,}07 \cdot 10^5 \ J$$

$$\eta = \frac{\mathcal{L}_{TOT}}{Q_{23}} = \frac{4.07 \cdot 10^5}{8.372 \cdot 10^5} = 0{,}486$$

Variazioni di entropia

$\Delta S_{12} = 0$ ad. rev.

$\Delta S_{34} = 0$ ad. rev

$$\Delta S_{23} = n c_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 835.66 \ J/K$$

$$\Delta S_{41} = n c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) = -835.66 \ J/K$$

Verifichiamo che l'entropia nel ciclo $= 0$

$$n c_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + n c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = \Delta S_{23} + \Delta S_{41}$$

$$= n c_v \ln\left(\frac{T_3 T_1}{T_4 T_2}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) =$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$$

$$= n c_v \ln\left[\frac{\cancel{V_4}}{V_3} \cdot \frac{V_2}{\cancel{V_1}}\right]^{\gamma-1} + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) =$$

$$= n c_v (\gamma-1) \ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) =$$

$$= n c_v \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) \ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) =$$

$$= 0$$