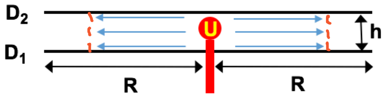
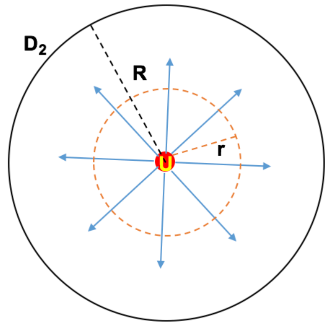
Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2019/20
Corso di Fluidi e Termodinamica
1° prova in itinere del 29/4/2020

1) Un tubo è posizionato sull'asse di una regione cilindrica formata da due dischi circolari D_1 e D_2 di raggio R=5 cm posti a distanza h=0.5 cm. Il tubo termina con un ugello U (di raggio b=5 mm) che immette 10 l/s di aria (densità 1.3 kg/m^3) al centro dell'intercapedine fra i due dischi. L'aria fluisce in direzione radiale fino a raggiungere i bordi laterali aperti dell'intercapedine. Calcolare (assumendo che l'aria sia un fluido ideale e trascurando gli effetti gravitazionali):



PROIEZIONE VERTICALE



PROIEZIONE ORIZZONTALE

a) la velocità di uscita dell'aria dai bordi laterali;

b) la pressione dell'aria nell'intercapedine in un generico punto a distanza r dall'ugello U. Calcolare la pressione nel punto a distanza minima r=b. Fare il grafico della pressione in funzione di r nell'intervallo fra b e R.

c) la risultante delle forze di pressione agenti su ciascun disco (considerare come distanza minima r=b). Tali forze tendono ad avvicinare o allontanare i dischi?

2) Un getto orizzontale d'acqua (densità ρ) di sezione S e portata Q investe una superficie piana, fissa, ad un angolo θ rispetto alla normale alla superficie. Determinare modulo, direzione e verso della forza esercitata dal getto sulla superficie nel caso che:
a) il getto rimbalzi in modo completamente elastico sulla superficie;
b) il getto subisca una collisione completamente anelastica con la parete e successivamente l'acqua coli (con velocità trascurabile) lungo la superficie stessa.
Per quali angoli di incidenza θ, la forza del caso a) è maggiore di quella del caso b)?

3) Una boa sottomarina di forma sferica e massa trascurabile è ancorata al fondo ad una profondità h=8 m mediante una catena di massa m = 30 kg e volume trascurabile.
a) Determinare il valore minimo V_{min} del volume della boa necessario a mantenere tesa la catena.
b) Determinare la forza esercitata dalla catena sulla boa nel caso che essa abbia un volume $V = 4V_{min}$.
c) Nelle condizioni del punto b) la catena si stacca dal fondo, rimanendo attaccata alla boa. Determinare l'accelerazione del sistema ed il tempo che il punto più alto della boa impiega a raggiungere la superficie dell'acqua.
d) Una volta che essa ha raggiunto la superficie, determinare la frazione del volume della boa che emerge dall'acqua all'equilibrio.

Soluzioni

1) $Q = 10\ \ell/s$ $\qquad Q = A v = 2\pi r h v$

$V(r=R)$ velocitá uscita dai bordi $\qquad Q = 2\pi R h V$

$$V = \frac{Q}{2\pi R h} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\ m^3/s}{2\pi \cdot 0.05 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ m^2} = 6.37\ m/s$$

$$p(r) + \frac{1}{2}\rho v^2(r) = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho V^2 \qquad \text{Bernoulli}$$

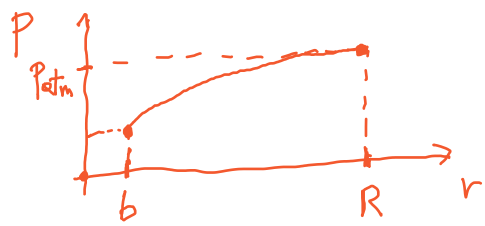
$$Q = \cancel{2\pi} r \cancel{h}\, v(r) = \cancel{2\pi} R \cancel{h}\, V \qquad \text{equ. continuitá}$$

$$\frac{V}{v(r)} = \frac{r}{R} \qquad\qquad v_r = \frac{Q}{2\pi r h}$$

$$p(r) = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\left[V^2 - v^2(r)\right]$$

$$p(r) = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\left[\frac{Q^2}{4\pi^2 h^2 R^2} - \frac{Q^2}{4\pi^2 h^2 r^2}\right]$$

$$p(r) = p_{atm} + \frac{Q^2 \rho}{8\pi^2 h^2}\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right]$$



$$p(b) = p_{atm} + \frac{Q^2 \rho}{8\pi^2 h^2}\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{b^2}\right]$$

$$\frac{dp}{dr} \propto \frac{2}{r^3} > 0$$

$$\frac{d^2p}{dr^2} \propto -\frac{6}{r^4} < 0$$

$$dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\, dr + \cancel{\pi dr^2}$$

$$F = \int (p(r) - p_{atm})\, dS = \int_b^R (p(r) - p_{atm})\, 2\pi r\, dr$$

c) $$F = \int_b^R \frac{Q^2 \rho}{8\pi^2 h^2}\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right] 2\pi r\,dr =$$

$$= \frac{Q^2 \rho}{4\pi h^2} \int_b^R \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right) r\,dr =$$

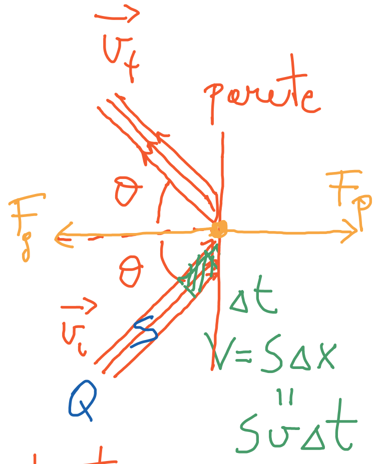
$$= \frac{Q^2 \rho}{4\pi h^2} \left\{ \int_b^R \frac{1}{R^2}\, r\,dr - \int_b^R \frac{1}{r}\,dr \right\} =$$

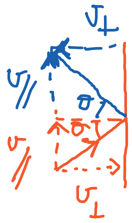
$$= \frac{Q^2 \rho}{4\pi h^2} \left\{ \left[\frac{1}{R^2}\,\frac{r^2}{2}\right]_b^R - \left[\ln r\right]_b^R \right\} =$$

$$= \frac{Q^2 \rho}{4\pi h^2} \left[\frac{R^2 - b^2}{2R^2} - \ln\left(\frac{R}{b}\right)\right] =$$

$$= \frac{(10^{-2})^2 \cdot 1{,}3}{4\pi\,(5\cdot 10^{-3})^2} \left[\frac{(5\cdot 10^{-2})^2 - (5\cdot 10^{-3})^2}{2\,(5\cdot 10^{-2})^2} - \ln\frac{5\cdot 10^{-2}}{5\cdot 10^{-3}}\right] = -18{,}7\ N$$

2)





elastico

$$|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f|$$

$$v_{i\parallel} = v_{f\parallel}$$

$$v_{i\perp} = -v_{f\perp}$$

$$|\vec{v}_i| = \sqrt{v_{i\parallel}^2 + v_{i\perp}^2} = \sqrt{v_{f\parallel}^2 + v_{f\perp}^2} = |\vec{v}_f|$$

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = \Delta m\left(\vec{v}_f - \vec{v}_i\right)$$

$$\Delta m = \rho\, v_i S \Delta t$$

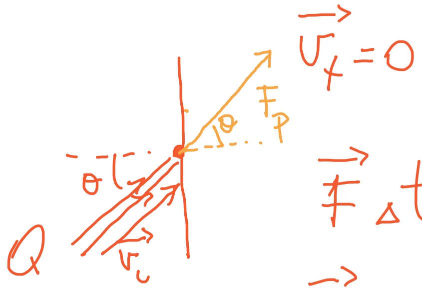
$$\vec{F}\cancel{\Delta t} = \rho\, v_i S \cancel{\Delta t}\left(\vec{v}_f - \vec{v}_i\right)$$

$$\left(\vec{v}_f - \vec{v}_i\right) = \begin{pmatrix} v_{f\parallel} \\ v_{f\perp} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{i\parallel} \\ v_{i\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v_{i\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v_i\cos\theta \end{pmatrix}$$

$F \perp$ parete

$$F = 2\rho\, v_i^2 S\cos\theta = 2\rho\left(\frac{Q}{S}\right)^2 S\cos\theta = 2\rho\frac{Q^2}{S}\cos\theta$$

ANELASTICO



$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = \Delta m\left(\vec{v}_f - \vec{v}_i\right)$$

$$\vec{F}\Delta t = -\Delta m\,\vec{v}_i$$

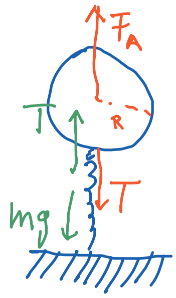
$$F\cancel{\Delta t} = \rho\, v_i S\cancel{\Delta t}\, v_i = \rho S v_i^2 \cancel{\Delta t}$$

$$F = \rho S v_i^2 = \rho\frac{Q^2}{S}$$

$F_{el} > F_{an}$ $\qquad 2\cancel{\rho}\cancel{\frac{Q^2}{S}}\cos\theta > \cancel{\rho\frac{Q^2}{S}}$

$2\cos\theta > 1 \Rightarrow \cos\theta > \frac{1}{2} \qquad \theta < 60°$

3)



$$\begin{cases} T - F_A = 0 & \text{boa} \\ mg - T = 0 & \text{catena} \end{cases} \Rightarrow T = mg$$

a) In tensione $\quad F_A \geq T = mg$

$F_A \geq mg \qquad \rho V \cancel{g} \geq m\cancel{g} \qquad V \geq \frac{m}{\rho}$

$V_{MIN} = \frac{m}{\rho} = \frac{30}{10^3} = 0.03\ m^3$

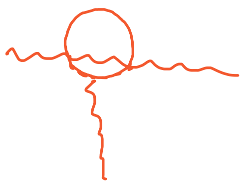
b) $V = 4V_{MIN} = 4\frac{m}{\rho}$

$T = F_A = \rho\, 4V_{MIN}\, g = 4mg \simeq 1200\ N$

c) $ma = mg - F_A = mg - 4mg = -3mg \Rightarrow a = -3g$

$h = \frac{1}{2}at^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{3g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8}{3\cdot 9.8}} = 0.73\ s$

d)



$F_A = mg$

$\rho V_{im} g = mg \Rightarrow V_{im} = \frac{m}{\rho} = V_{MIN} = \frac{1}{4}V$

Parte emersa $\frac{3}{4}V$