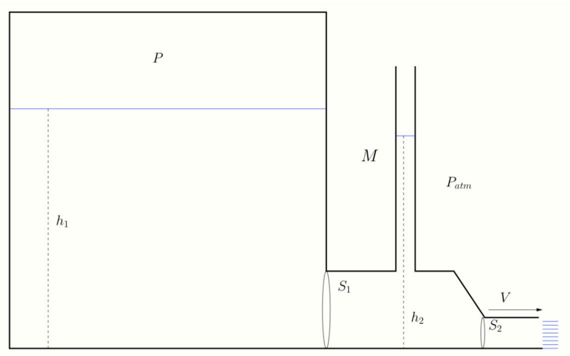
Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2018/19
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 10/7/2019

1) Un recipiente cilindrico di sezione S è riempito fino ad una altezza h_1 di acqua, e per la parte rimanente di vapore a pressione P costante. Sul fondo è praticato un foro di sezione S_1 <<S, collegato ad una conduttura che nel tratto finale ha sezione a $S_2 < S_1$. Nella conduttura è inserito un cilindro verticale aperto M, come in figura.



a) Che altezza h_2 raggiunge l'acqua nel cilindro M se il foro di sezione S_2 è chiuso?

b) Se si apre il foro di sezione S_2, qual è la velocità di uscita dell'acqua? E la nuova altezza h_2?

2) Consideriamo un ciclo termodinamico di n moli di un gas perfetto monoatomico, costituito dalle seguenti trasformazioni:
- dallo stato A allo stato B, trasformazione isocora reversibile con assorbimento di calore da parte del gas;
- dallo stato B allo stato C espansione isoterma reversibile;
- dallo stato C allo stato A compressione isobara reversibile.

Sono noti la temperatura T_B e il calore Q_{BC} assorbito dal gas durante la trasformazione isoterma. Si calcoli:
a) la variazione di entropia del gas ΔS tra B e C;
b) la temperatura T_A;
c) Il lavoro $L_{CA} + L_{AB}$ fatto dal gas;
esprimendo i risultati in funzione di n, T_B, Q_{BC} ed R.

3) Un blocco di rame di massa m = 0.5 kg cade da un'altezza di h = 100 m in un lago a temperatura T_L = 283 K. La temperatura iniziale del blocco di rame vale T_1 = 423 K. Calcolare la variazione di entropia dell'universo in questo processo. Il calore specifico del rame è c = 387 J/(kg K).

SOLUZIONI

Esercizio 1
a) La pressione è la stessa sul fondo del recipiente. Applicando la formula di Stevino

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2$$

$$h_2 = h_1 + \frac{P - P_{atm}}{\rho g}\,.$$

a) Applichiamo il teorema di Bernoulli alla sommità del liquido nel recipiente, in S_1 e in S_2

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V^2$$

Per l'equazione di continuità $S_1 V_1 = S_2 V$ e sostituendo

$$V = \sqrt{\frac{2\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)}{\rho}}$$

$$h_2 = \frac{\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)\left(S_1^2 - S_2^2\right)}{\rho g S_1^2}\,.$$

Esercizio 2

a) La trasformazione BC è isoterma quindi

$$\Delta S_{BC}^g = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_B}\int_B^C dQ = \frac{Q_{BC}}{T_B}$$

b) Dato che la trasformazione è ciclica, e che l'entropia è una funzione di stato, sappiamo che l'entropia del gas non può cambiare in un ciclo. Possiamo quindi scrivere, usando la formula dell'entropia per un gas perfetto

$$\Delta S^g = \Delta S_{AB}^g + \Delta S_{BC}^g + \Delta S_{CA}^g = 0$$

$$\begin{aligned}
\Delta S_{AB}^g &= n c_v \log\frac{T_B}{T_A} \\
\Delta S_{BC}^g &= \frac{Q_{BC}}{T_B} \\
\Delta S_{CA}^g &= n c_p \log\frac{T_A}{T_B}
\end{aligned}$$

$$n(c_p - c_v)\log\frac{T_A}{T_B} + \frac{Q_{BC}}{T_B} = 0$$

$$T_A = T_B e^{-\frac{Q_{BC}}{nRT_B}}$$

c) Applicando il primo principio della termodinamica alla due trasformazioni CA e AB

$U_A - U_C = Q_{CA} - L_{CA}$

$U_B - U_A = Q_{AB} - L_{AB}$

E sommando si ottiene

$U_A - U_C + U_B - U_A = Q_{CA} - L_{CA} + Q_{AB} - L_{AB}$

$-U_C + U_B = Q_{CA} - L_{CA} + Q_{AB} - L_{AB}$

Notiamo che

$-U_C + U_B = 0$ perché la trasformazione BC è isoterma ! Quindi

$Q_{CA} - L_{CA} + Q_{AB} - L_{AB} = 0$

$Q_{CA} + Q_{AB} = L_{CA} + L_{AB}$

$L_{CA} + L_{AB} = n\, c_p\, (T_A - T_C) + n\, c_v\, (T_B - T_A)$

Ma $T_B = T_C$ perché si trovano agli estremi dell'isoterma

$L_{CA} + L_{AB} = n\, c_p\, (T_A - T_B) + n\, c_v\, (T_B - T_A) = nR\, (T_A - T_B)$

E ora si può sostituire a T_A il risultato del punto b

3)

La variazione di entropia dell'universo (ΔS_U) e pari alla somma della variazione di entropia del sistema, ossia del blocco di rame (ΔS_{Cu}), e della variazione di entropia dell'ambiente esterno, ossia del lago (ΔS_L). Quindi

$$\Delta S_U = \Delta S_{Cu} + \Delta S_L$$

Consideriamo per primo il blocco di rame: esso subisce una variazione di temperatura e cede una certa quantita di calore, dunque la variazione corrispondente dell'entropia vale

$$\Delta S_{Cu} = \int_{T_1}^{T_L} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_L} \frac{mcdT}{T} = mcln(\frac{T_L}{T_1}) = -77,8J/K$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia dell'ambiente, il lago puo essere considerato una sorgente termica a temperatura costante, quindi

$$\Delta S_L = \frac{Q_L}{T_L}$$

Dove Q_L rappresenta l'energia assorbita dal lago: quest'ultima risulta dall'energia potenziale gravitazionale del blocco convertita in energia cinetica e poi termica e dal calore ceduto dal blocco al lago, quindi

$$Q_L = mgh + mc(T_1 - T_L) = 27580J$$

La variazione di entropia del lago e quindi pari a:

$$\Delta S_L = \frac{27580J}{283K} = 97,5J/K$$

e la variazione di entropia dell'universo e data da

$$\Delta S_U = \Delta S_{Cu} + \Delta S_L = 97,5J/K - 77,8J/K = 19,7J/K$$