Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2018/19
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 12/6/2019

Chi fa l'esame completo svolga il primo esercizio e uno a scelta fra il 2 e il 3.
Chi ha superato la 1° prova in itinere svolga gli esercizi 2 e 3.

1) Un recipiente cilindrico chiuso di raggio R=5 cm e altezza H = 30 cm è riempito per 1/3 di acqua. La parte sovrastante l'acqua contiene aria compressa a pressione p. Si pratica sul fondo del recipiente un foro di raggio r = 2 mm, da cui fuoriesce un getto di acqua che colpisce il piano su cui poggia il recipiente. Si calcoli la minima pressione dell'aria affinché la spinta del getto faccia sollevare il cilindro.

   Si trascuri la variazione di massa dell'acqua nel cilindro (R>>r) e si assuma che la velocità del getto dopo l'urto con il piano di appoggio sia nulla.

2) Una macchina frigorifera reversibile scambia calore con l'ambiente esterno a 20°C. Quale lavoro occorre fare sulla macchina per solidificare 1 kg di acqua, inizialmente a 20°C, posto all'interno del frigorifero?
   (calore specifico dell'acqua 4180 J/(kg K); calore latente di fusione: 333×10^5 J/kg)

3) Un recipiente adiabatico chiuso da un pistone pesante scorrevole senza attrito, contiene 2 moli di un gas perfetto monoatomico in equilibrio termodinamico. Sul pistone viene appoggiato un blocco di massa doppia rispetto a quella del pistone, e dopo un certo tempo il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Calcolare la variazione di entropia del gas considerando la trasformazione irreversibile.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Applichiamo il teorema di Bernoulli fra la superficie dell'acqua e il foro di uscita (u)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \frac{1}{3} H = p_u + \frac{1}{2} v_u^2$$

dove p_u è la pressione atmosferica.
Dall'equazione di continuità abbiamo

$$\pi R^2 v = \pi r^2 v_u$$

$$v = \frac{r^2}{R^2} v_u = \left(\frac{2}{50}\right)^2 v_u = 1.6 \times 10^{-3} v_u$$

Quindi è giustificato assumere v=0, cioè il livello del liquido nel recipiente si può considerare costante su tempi brevi.
Sostituendo nell'equazione di Bernoulli

$$p - p_u + \rho g \frac{1}{3} H = \frac{1}{2} v_u^2$$

$$v_u = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p - p_u\right) + \frac{2}{3} g H}$$

Consideriamo ora il getto di uscita. In un tempo infinitesimo la massa d'acqua che fuoriesce dal foro è

$$\Delta m = \rho \pi r^2 v_u \Delta t$$

La forza che esercita sul piano di appoggio è data dal teorema dell'impulso

$$F \Delta t = \Delta q = \Delta m v_u = \rho \pi r^2 v_u^2 \Delta t$$

da cui

$$F = \rho \pi r^2 v_u^2 = \rho \pi r^2 \left[\frac{2}{\rho}\left(p - p_u\right) + \frac{2}{3} g H\right]$$

Il piano esercita sul cilindro una forza uguale e contraria (diretta verso l'alto) per il principio di azione e reazione. Per sollevare il cilindro tale forza deve essere maggiore del peso dell'acqua nel recipiente

$$F > Mg = \rho\pi R^2 \frac{1}{3} Hg$$

e sostituendo l'espressione di F

$$\rho\pi r^2 \left[\frac{2}{\rho}\left(p - p_u\right) + \frac{2}{3} gH\right] > \rho\pi R^2 \frac{1}{3} Hg$$

$$p > p_u + Hg\rho\left(\frac{R^2}{6r^2} - \frac{1}{3}\right) = 10^5 + 0.3 \times 9.8 \times 10^3 \left(\frac{5^2}{6 \times 0.2^2} - \frac{1}{3}\right) = 4.05 \times 10^5 \textbf{ Pa}$$

Esercizio 2

2) Per solidificare la massa d'acqua, va da essa estratta la quantità di calore

$$Q_0 = -m\lambda - mc\left(T_0 - T_1\right) = -1 \times 3.33 \times 10^5 - 1 \times 4180 \times 20 = -416000 \textbf{ J}$$

dove T_0 = 273 K e T_1=293 K.
La quantità $-Q_0$ (>0) è il calore che la macchina frigorifera assorbe dalla massa d'acqua.
Definiamo Q_1 (<0) il calore che la macchina cede all'ambiente esterno, e L (<0) il lavoro fatto sulla macchina.
Dato che si tratta di una macchina ciclica L = $-Q_0 + Q_1$
Per ricavare Q_1, sappiamo che in una ciclo infinitesimo della macchina reversibile vale

$$\frac{-dQ_0}{T} + \frac{dQ_1}{T_1} = 0$$

dove T_1 è la temperatura dell'ambiente esterno (sorgente calda), mentre la temperatura T della sorgente fredda (l'acqua) varia durante la trasformazione.

$$-dQ_0 = dm\lambda - mcdT$$

e sostituendo

$$\frac{\lambda dm}{T_0} - \frac{mcdT}{T} + \frac{dQ_1}{T_1} = 0$$

$$\int \frac{\lambda dm}{T_0} - \int_{T_1}^{T_0} \frac{mcdT}{T} + \int \frac{dQ_1}{T_1} = 0$$

$$\frac{\lambda m}{T_0} - mc \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) + \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$Q_1 = -T_1 \left[\frac{\lambda m}{T_0} + mc \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right] = -293 \times \left[\frac{3.33 \times 10^5 \times 1}{273} + 1 \times 4180 \ln\left(\frac{293}{273}\right)\right] = -443986 \text{ J}$$

$L = -Q_0 + Q_1 = -27386$ J

Esercizio 3

La trasformazione è irreversibile, quindi si può applicare l'equazione dei gas perfetti solo allo stato iniziale A e finale B che sono di equilibrio.

$p_A V_A = n R T_A$

$p_B V_B = n R T_B$

Notiamo che dato che il blocco ha massa doppia rispetto a quella (M) del pistone, la pressione in B è

$p_B = (M+2M)/S = 3 M/S = 3 p_A$

dove è stata indicata con S la sezione del pistone.
Sostituendo p_B e dividendo la seconda equazione dei gas perfetti per la prima otteniamo

$3 V_B / V_A = T_B / T_A$ (*)

Applichiamo il primo principio della termodinamica, tenendo presente che Q=0 in quanto la trasformazione è adiabatica

$$\Delta U = -L$$

Dato che la trasformazione è irreversibile non si può calcolare L come integrale di p dV, dato che p non è definita durante la trasformazione. Occorre allora calcolare il lavoro delle forze esterne (che esercitano un pressione p_B durante la trasformazione)

$$L_e = p_B \left(V_A - V_B\right)$$

e considerare che $L = -L_e = -p_B (V_B - V_A) < 0$ poiché si tratta di una compressione.
Sostituendo

$$\Delta U = -L = L_e = p_B \left(V_A - V_B\right)$$

e applicando la definizione di energia interna, otteniamo

$$nc_V\left(T_B - T_A\right) = p_B\left(V_A - V_B\right)$$

Applicando al secondo termine le equazioni dei gas perfetti scritte all'inizio

$$nc_V\left(T_B - T_A\right) = p_BV_A - p_BV_B = 3p_AV_A - p_BV_B = nR\left(3T_A - T_B\right)$$

$$\frac{3}{2}\left(T_B - T_A\right) = \left(3T_A - T_B\right)$$

$$3T_B - 3T_A = 6T_A - 2T_B$$

$$5T_B = 9T_A$$

$$T_B = \frac{9}{5}T_A$$

Sostituendo quest'ultima in (*)

$3\ V_B/V_A = T_B/T_A = 9/5 \rightarrow V_B/V_A = 3/5$

Applichiamo infine la formula per calcolo dell'entropia dei gas perfetti

$$\Delta S = nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta S = 2\frac{3}{2}R\ln\left(\frac{9}{5}\right) + 2R\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Delta S = 3R\ln\left(\frac{9}{5}\right) + 2R\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Delta S = 8R\ln 3 - 5R\ln 5 = 8 \times 8.31 \ln 3 - 5 \times 8.31 \ln 5 = 6.16\ \textbf{J/K}$$