Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2017/18
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 9/11/2018

1) Una condotta di diametro 80 cm porta acqua ad una centrale idroelettrica facendole compiere un dislivello di 200 m tra il bacino di alimentazione e le turbine della centrale. Assumendo che non vi siano attriti e che la velocità iniziale dell'acqua sia nulla, calcolare:
   a) la velocità con cui l'acqua arriva sulle turbine.
   b) la potenza estraibile dall'acqua e assorbita dalle turbine, se la velocità dell'acqua è dimezzata dopo l'urto con le turbine.

2) Una mole di gas ideale biatomico si trova in un recipiente cilindrico, una cui base è costituita da un pistone mobile. L'altra base, perfettamente conduttrice, è inizialmente posta a contatto termico con una sorgente a temperatura T_1= 600 K (stato A). Il gas si espande in maniera reversibile fino a triplicare il suo volume (stato B). A questo punto, il pistone viene bloccato e il recipiente posto in contatto con una sorgente a temperatura T_2=400 K. Una volta raggiunto l'equilibrio termico (stato C), il pistone è lasciato nuovamente libero di scorrere, e il gas (sempre in contatto con la sorgente T_2) viene compresso in maniera reversibile fino al volume iniziale (stato D). A questo punto il pistone è nuovamente bloccato e il gas posto in contatto con la sorgente iniziale T_1, fino a che ritorna allo stato iniziale A.
   a) disegnare il ciclo nel piano PV (notare che le trasformazioni BC e DA sono irreversibili);
   b) calcolare il rendimento del ciclo;
   c) calcolare la variazione di entropia del gas e dell'universo in un ciclo.

SOLUZIONI

Esercizio 2

Si tratta di un ciclo di Stirling dato da due isoterme reversibili (AB e CD) unite da due isocore irreversibili (BC e DA).
Calcoliamo il lavoro e il calore scambiato in ogni trasformazione, indicando con V_0 il volume iniziale del gas,

$$L_{AB} = Q_{AB} = nRT_1 \ln\left(\frac{3V_0}{V_0}\right) = nRT_1 \ln 3 > 0$$

$$L_{BC} = 0 \qquad Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_V\left(T_2 - T_1\right) < 0$$

$$L_{CD} = Q_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_0}{3V_0}\right) = -nRT_2 \ln 3 < 0$$

$$L_{DA} = 0 \qquad Q_{DA} = \Delta U_{DA} = nc_V\left(T_1 - T_2\right) > 0$$

$$\eta = \frac{L_{AB} + L_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = \frac{nR\left(T_1 - T_2\right)\ln 3}{nRT_1 \ln 3 + nc_V\left(T_1 - T_2\right)} = \frac{\left(600 - 400\right)\ln 3}{600 \ln 3 + \frac{5}{2}\left(600 - 400\right)} = \frac{2\ln 3}{6\ln 3 + 5} = 0.189$$

Si può osservare che la variazione di entropia totale del gas è nulla, come ci si aspetta in un ciclo, in quanto l'entropia è una funzione di stato.
Dato che l'entropia del gas è nulla, l'entropia dell'universo è uguale all'entropia delle due sorgenti esterne in contatto con il gas.

$$\Delta S_{sorg1} = \frac{-Q_{AB} - Q_{DA}}{T_1} = -\frac{nRT_1 \ln 3 + nc_V\left(T_1 - T_2\right)}{T_1} = -\frac{6\ln 3 + 5}{6} = -\frac{5}{6} - \ln 3$$

$$\Delta S_{sorg2} = \frac{-Q_{BC} - Q_{CD}}{T_2} = -\frac{nc_V\left(T_2 - T_1\right) - nRT_2 \ln 3}{T_2} = \frac{5 + 4\ln 3}{4} = \frac{5}{4} + \ln 3$$

$$\Delta S_{UNIV} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorg1} + \Delta S_{sorg2} = -\frac{5}{6} + \frac{5}{4} = \frac{5}{12} \ \text{J/K} \ >0$$

L'entropia dell'universo è >0 come ci si aspetta per una trasformazione irreversibile.

Esercizio 1

a) Applicando il teorema di Bernoulli

$$p_0 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_0$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 200} = 62.6 \text{ m/s}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica, h=200 m, e v la velocità dell'acqua che arriva sulle turbine.

b) la quantità d'acqua che esce dalla condotta e urta le turbine in un tempo Δt è data dall'espressione

$$\Delta m = \rho\ \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v\ \Delta t$$

(dove ρ è la densità dell'acqua).

Il lavoro fatto dal flusso d'acqua sulle turbine è dato dalla differenza di energia cinetica della massa d'acqua Δm prima e dopo l'urto con le turbine. Dato che dopo l'urto la velocità dell'acqua si dimezza, abbiamo

$$\Delta L = \frac{1}{2}\Delta m\ v^2 - \frac{1}{2}\Delta m\ \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\Delta m\ v^2 = \frac{3}{8}\rho\ \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v^3\ \Delta t = \frac{3}{32}\rho\ \pi\ d^2\ v^3\ \Delta t$$

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{3}{32}\rho\ \pi\ d^2\ v^3 = \frac{3}{32}\times 10^3 \times 3.14 \times 0.8^2 \times 62.6^3 = 46.2 \times 10^6\ \text{W}$$