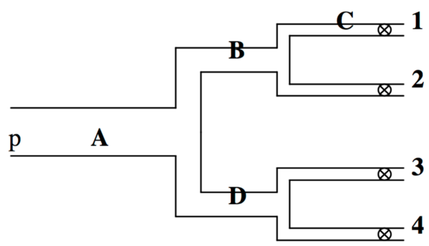
Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2017/18
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 6/6/2018

Chi fa l'esame completo svolga tutti gli esercizi.
Chi ha superato la 1° prova in itinere svolga gli esercizi 2 e 3.



1) Una conduttura orizzontale di sezione $S = 5\ cm^2$ in cui si ha una pressione costante $p = 4$ atm si divide in due condutture uguali di sezione $S/2$ ognuma delle quali si divide a sua volta in due condutture uguali di sezione $S/4$ chiuse dai rubinetti 1,2,3 e 4. Determinare la pressione nei punti A, B, C, D nei seguenti casi:

a) i rubinetti sono tutti chiusi;

b) rubinetto 1 aperto, rubinetti 2, 3 e 4 chiusi;

c) rubinetti 1 e 2 aperti , 3 e 4 chiusi.

2) Una macchina termica irreversibile fornisce una potenza meccanica W = 120 KW rilasciando all'ambiente, a temperatura $t_A = 20°C$, una quantità di calore per unità di tempo $Q_A = 70$ kcal/s.

a) Determinare la potenza termica (calore per unità di tempo) assorbita.
b) Se la macchina assorbe tale calore da un'unica sorgente, determinare la minima temperatura della sorgente.
c) Se invece la macchina assorbe tale calore da due sorgenti a temperatura $T_1 = 500$ K e $T_2 = 400$ K, determinare il minimo valore della potenza che deve fornire la sorgente a temperatura T_1.
d) Nel caso in cui la macchina assorba calore da un'unica sorgente a temperatura $T_1 = 500$ K, determinare la variazione di entropia per unità di tempo dell'universo e la potenza meccanica persa, ossia la maggior potenza che produrrebbe una macchina reversibile, a parità di potenza termica assorbita.

3) n moli di gas perfetto biatomico si trovano inizialmente in uno stato A di pressione p_1 e volume V_1. Il sistema esegue un ciclo termodinamico reversibile costituito da una trasformazione isocora fino ad uno stato B a pressione $p_2=2p_1$, seguita da una espansione isobara fino allo stato C di volume $V_3 = 2V_1$, da un'ulteriore trasformazione isocora, in cui si porta in D alla pressione p_1, e infine da una trasformazione isobara con cui torna nello stato iniziale A.

a) Calcolare il rendimento del ciclo.

b) Calcolare il lavoro compiuto nel ciclo nel caso in cui si passi dallo stato A a B mediante una trasformazione adiabatica irreversibile.

c) Calcolare la variazione di entropia delle macchine nei casi a) e b).

SOLUZIONI

Esercizio 1

a) Se i rubinetti sono chiusi la pressione è uguale a p_A in tutti i punti del condotto.
b) Applichiamo il teorema di Bernoulli nei punti A, B, C

$$p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

La pressione in C a rubinetto aperto è uguale alla pressione atmosferica p_C=1 atm
Dall'equazione di continuità abbiamo

$$Q = Sv_A = \frac{S}{2}v_B = \frac{S}{4}v_C \Rightarrow v_B = 2v_A \qquad v_C = 4v_A$$

Sostituiamo nell'equazione di Bernoulli che lega A e C, per trovare v_A

$$p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$p_C + \frac{1}{2}\rho 16 v_A^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2(p_A - p_C)}{15\rho}} = 0.02 \text{ m/s}$$

Sostituiamo v_A nell'equazione di Bernoulli che lega A e B, per trovare p_B

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho 4 v_A^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$p_B = p_A - \frac{3}{2}\rho v_A^2 = 3.4 \text{ atm}$$

La pressione in D è uguale a quella in A

c) Riscriviamo l'equazione di Bernoulli

$$p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Poiché è aperto anche il rubinetto 2, il flusso da B si divide in due flussi uguali che vanno alle condutture più piccole dei rubinetti 1 e 2. L'equazione di continuità è ora

$$Q = Sv_A = \frac{S}{2}v_B = 2\frac{S}{4}v_C \Rightarrow v_B = 2v_A \qquad v_C = 2v_A$$

Da cui sostituendo nelle equazione di Bernoulli

$$p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$p_C + \frac{1}{2}\rho 4v_A^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2(p_A - p_C)}{3\rho}} = 0.0447 \text{ m/s}$$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho 4v_A^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$p_B = p_A - \frac{3}{2}\rho v_A^2 = 1 \text{ atm}$$

La pressione in D è uguale a quella in A

Esercizio 2

a) Una macchina termica lavora a cicli termodinamici → W = Q_A + Q_0 dove Q_0 è il calore assorbito per unità di tempo. 1 kcal equivale a 4.186 kJ
Q_A = -70 kcal/s = -70 x 4.186 kJ/s = -293 kW
Q_0 = W – Q_A = 120 - (-293) = 413 kW

b) La macchina è irreversibile, quindi vale la disuguaglianza di Clausius, da cui si ricava la minima temperatura T_0 della sorgente calda

$$\frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_0}{T_0} < 0$$

$$\frac{Q_0}{T_0} < -\frac{Q_A}{T_A} = \frac{|Q_A|}{T_A}$$

$$T_0 > \frac{Q_0}{|Q_A|}T_A = \frac{413}{293}293 = 413 \text{ K}$$

c) Se ci sono due sorgenti da cui la macchina assorbe calore, la diseguaglianza di Clausius diventa

$$\frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

dove $Q_1 + Q_2 = Q_0$.

$$\frac{Q_A}{T_A}+\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_0-Q_1}{T_2}<0$$

$$Q_1\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)+\frac{Q_0}{T_2}-\frac{|Q_A|}{T_A}<0$$

$$Q_1\frac{T_2-T_1}{T_1T_2}+\frac{Q_0T_A-|Q_A|T_2}{T_AT_2}<0$$

$$Q_1>\frac{T_1}{T_A}\frac{Q_0T_A-|Q_A|T_2}{T_1-T_2}=\frac{500}{293}\times\frac{413\times 293-293\times 400}{500-400}=65\text{ kW}$$

d)

$$\frac{\Delta S}{t}=-\frac{Q_A}{T_A}-\frac{Q_0}{T_0}=-\frac{-293}{293}-\frac{413}{500}=0.174\text{ kW/K}$$

Calcoliamo il rendimento della macchina irreversibile e il rendimento di una macchina reversibile che lavori con le stesse sorgenti T_1 e T_A

$$\eta_I=\frac{W}{Q_0}=0.29$$

$$\eta_R=1-\frac{T_1}{T_A}=0.414$$

$$\eta_R=\frac{W_R}{Q_0}\Rightarrow W_R=\eta_R Q_0=171\text{ kW}$$

$$W_p=W_R-W=51\text{ kW}$$

La macchina ideale produrrebbe una maggiore potenza di 51 kW.

3)

a)

$$L_{AB}=0$$

$$L_{BC}=2p_1\left(2V_1-V_1\right)=2p_1V_1$$

$$L_{CD}=0$$

$$L_{DA}=p_1\left(-2V_1+V_1\right)=-p_1V_1$$

$$L_{TOT}=p_1V_1$$

$$Q_{AB}=nc_v\left(T_B-T_A\right)>0$$

$$Q_{BC}=nc_p\left(T_C-T_B\right)>0$$

$$Q_{CD}=nc_v\left(T_D-T_C\right)<0$$

$$Q_{DA}=nc_p\left(T_A-T_D\right)<0$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{2p_1}{p_1} = 2 \Rightarrow T_B = 2T_A$$
$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{2V_1}{V_1} = 2 \Rightarrow T_C = 2T_B = 4T_A$$
$$\frac{T_C}{T_D} = \frac{2p_1}{p_1} = 2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2}T_C = T_B = 2T_A$$

$$\eta = \frac{L_{TOT}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{p_1V_1}{nc_V\left(T_B - T_A\right) + nc_p\left(T_C - T_B\right)}$$
$$\eta = \frac{p_1V_1}{n\frac{5}{2}RT_A + n\frac{7}{2}R2T_A} = \frac{p_1V_1}{nRT_A}\frac{2}{19} = \frac{2}{19}$$

b) Se la trasformazione AB è ora adiabatica irreversibile, cambiano rispetto al punto a solo

$$Q_{AB} = 0$$
$$L_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_v\left(T_B - T_A\right) = -n\frac{5}{2}RT_A$$

mentre L e Q nelle altre trasformazioni e le relazioni fra p,V,T restano le stesse

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{DA} = 2p_1V_1 - n\frac{5}{2}RT_A - p_1V = \left(1 - \frac{5}{2}\right)p_1V_1 = -\frac{3}{2}p_1V_1 < 0$$

c) Il ciclo del punto a) è reversibile quindi $\Delta S = 0$

Anche nel ciclo b) $\Delta S=0$. Calcoliamo l'entropia nelle trasformazioni del ciclo b) esplicitamente

$$\Delta S_{AB} = nc_V \ln\frac{T_B}{T_A} = nc_v \ln 2$$
$$\Delta S_{BC} = nc_V \ln\frac{T_C}{T_B} + nR\ln\frac{V_C}{V_B} = nc_v \ln 2 + nR\ln 2$$
$$\Delta S_{CD} = nc_V \ln\frac{T_D}{T_C} = nc_v \ln\frac{1}{2}$$
$$\Delta S_{DA} = nc_V \ln\frac{T_A}{T_D} + nR\ln\frac{V_A}{V_D} = nc_v \ln\frac{1}{2} + nR\ln\frac{1}{2}$$
$$\Delta S = 0$$

Notare che anche se AB è una trasformazione adiabatica irreversibile, ΔS_{AB} non è zero, perché l'entropia va calcolata lungo una qualunque trasformazione reversibile che fra gli stati A e B. Poiché $V_A=V_B$ e $T_B=2T_A$ si ottiene il valore scritto sopra.