Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2016/17
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 14/2/2018

1) In un bicchiere è contenuta dell'acqua in cui galleggia un cubetto di ghiaccio di lato L=1 cm. Il livello dell'acqua è H=10 cm rispetto al fondo del bicchiere cilindrico, che ha raggio di base R=2.5 cm. Calcolare il livello dell'acqua dopo che il cubetto si è sciolto completamente.
   Se la temperatura iniziale dell'acqua è 7°C e quella del ghiaccio -5°C, calcolare la temperatura finale del liquido e la variazione di entropia nel processo considerando il sistema isolato.
   Le densità di acqua e ghiaccio sono rispettivamente ρ_a=1 g/cm^3, ρ_g=900 kg/m^3.
   Calore latente di fusione del ghiaccio λ_f= 333 kJ/kg; calore specifico dell'acqua c_a= 4186 J/(K kg); calore specifico del ghiaccio c_g=2050 J/(K kg).

2) Due moli di gas ideale, inizialmente nello stato 1, vengono messi a contatto termico con una sorgente termica di temperatura 800 K e raggiungono mediante una trasformazione isocora irreversibile uno stato termodinamico 2. Tramite una espansione isoterma reversibile il gas raggiunge quindi lo stato 3 tale che $V_3 = 2V_2$. Successivamente, il gas viene riportato allo stato 1 mediante una trasformazione isobara reversibile. Il calore specifico del gas a pressione costante dipende dalla temperatura secondo la relazione $c_p/R = 2 + 0.02\ T$, dove R è la costante dei gas perfetti.
   Determinare il calore e il lavoro in ogni trasformazione e il rendimento del ciclo.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Sia V_{0g} il volume del cubetto di ghiaccio, sia V_{0gs} il volume di quella parte del cubetto di ghiaccio sommersa sotto la superficie dell'acqua, sia V_{0l} il volume di liquido che risulta dal scioglimento del cubetto di ghiaccio. Se ρ rappresenta la densita dell'acqua e se ρ_g corrisponde alla densita del ghiaccio, possiamo scrivere due relazioni: la prima risulta dalla conservazione della massa durante la trasformazione di fase, massa del ghiaccio=massa del liquido, ovvero, in termini di densita,

$$\rho V_{0l} = \rho_g V_{0g} \tag{1}$$

mentre la seconda relazione risulta dal principio di Archimede per un corpo che galleggia in certo liquido, spinta di Archimede = peso del volume di liquido spostato = peso del corpo che galleggia, ovvero, in termini di densita e rappresentando l'accelerazione gravitazionale con g:

$$\rho V_{0gs} g = \rho_g V_{0g} g \tag{2}$$

e dividendo entrambi i menbri con g risulta

$$\rho V_{0gs} = \rho_g V_{0g} \tag{3}$$

I membri di destra delle equazioni (1) e (3) sono uguali e quindi possiamo esprimere l'ugualianza tra i membri di sinistra come (semplificando con ρ):

$$V_{0l} = V_{0gs}$$

Quindi risulta che il volume di acqua formato dallo scioglimento del cubetto di ghiaccio e pari al volume della parte di ghiaccio sommerso (infatti questo corrisponde al fatto che, contrariamente alla legge generale della dilatazione termica volumica, il volume di acqua e inferiore al volume corrispondente di ghiaccio). Dunque durante la trasformazione di fase, il livello di acqua nel bicchiere non cambia e l'acqua non esce dal bicchiere.

Calcoliamo la massa di acqua e ghiaccio iniziali

$$m_a = \pi R^2 H \rho_a = 0.19625 \text{ kg}$$
$$m_g = L^3 \rho_g = 9 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

Il calore ceduto dall'acqua nel bicchiere è

$$Q_a = m_a c_a \left(t_f - t_{ia}\right)$$

dove t_{ia} = 7 °C
Il calore assorbito dal cubetto serve prima a portarlo a 0°C, poi a far avvenire la transizione di fase, e infine a portare l'acqua derivante dalla fusione a temperatura finale.

$$Q_g = m_g\, c_g \left(0 - t_{ig}\right) + m_g\, \lambda + m_g\, c_a \left(t_f - 0\right)$$

dove t_{ig} = -5 °C
Il sistema acqua+cubetto di ghiaccio è isolato, quindi $Q_a = Q_g$
da cui si ricava t_f = 6.6 °C

Calcoliamo l'entropia di acqua e cubetto

$$\Delta S_{cubetto} = m_g c_g \ln \frac{273.15}{T_{ig}} + \frac{m_g \lambda}{273.15} + m_g c_a \ln \frac{T_f}{273.15} = +1.221 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_a = m_a c_a \ln \frac{T_f}{T_{ia}} = -1.203 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_a + \Delta S_{cubetto} = +0.018$$

Esercizio 2
Applicando la relazione di Mayer $c_p = c_v + R$, si ricava c_v

$$c_v = R(1 + 0.02T)$$

Dal primo principio $\Delta U = Q - W$, e tenendo conto del fatto che il lavoro lungo la trasformazione 1-2 e nullo dato che essa e isocora, abbiamo che $\Delta U_{1-2} = Q_{1-2}$. Quindi basterebbe calcolare ΔU_{1-2} per determinare il calore scambiato. Dobbiamo pero integrare l'espressione differenziale $dU = nc_v dT$, dato che c_v e una funzione continua della temperatura:

$$\Delta U_{1-2} = \int_{T_1}^{T_2} nc_v dT = nR\int_{T_1}^{T_2} (1 + 0.02T)dT$$

Per poter calcolare questa integrale, dobbiamo calcolare T_1. Considerando che $T_2 = T_3 = 800K$ (la trasformazione 2-3 e isoterma), e che $p_1 = p_3$ (la trasformazione 1-3 e isobara), possiamo utilizzare la legge dei gas perfetti nel modo seguente:

$$p_1V_1 = nRT_1$$

$$p_3V_3 = nRT_3$$

oppure

$$p_1V_1 = nRT_1$$

$$p_1V_3 = nRT_2$$

e dividendo queste ultime due relazioni membro a membro, si ottiene:

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{T_1}{T_2}$$

e dato che $V_1 = V_2$,

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_1}{T_2}$$

quindi, tenendo conto della relazione $V_3 = 2V_2$,

$$T_1 = T_2\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{2} = 400K$$

Infine il calcolo di ΔU_{1-2} risulta:

$$\Delta U_{1-2} = nR\int_{T_1}^{T_2} (1 + 0.02T)dT = nR[T + 0.01T^2]_{400K}{}^{800K} = 86465,6J = Q_{1-2}$$

- La trasformazione 2-3.

Questa trasformazione e isoterma, quindi la variazione di energia interna e nulla ed il primo principio implica che $Q_{2-3} = W_{2-3}$. Il lavoro viene calcolato mediante la relazione

$$W_{2-3} = \int_{V_2}^{V_3} p(V)dV = nRT_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{1}{V} dV = nRT_2 ln(\frac{V_3}{V_2}) = 9220,52J = Q_{2-3}$$

- La trasformazione 3-1.

Questa trasformazione e isobara e quindi dobbiamo integrare la relazione differenziale $\delta Q_{1-3} = nc_p dT$:

$$Q_{1-3} = \int_{T_3}^{T_1} n[2R + R(0.02)T]dT = -93116,8J$$

Il lavoro puo essere determinato dal primo principio, $W_{3-1} = Q_{3-1} - \Delta U_{3-1}$. Il calcolo di ΔU_{3-1} richiede l'integrazione della relazione differenziale $dU_{3-1} = nc_v dT$, tra le temperature T_3 e T_1:

$$\Delta U_{3-1} = \int_{T_3}^{T_1} nc_v dT = -86465,6J$$

Quindi il lavoro scambiato vale $W_{3-1} = -93116,8J + 86465,6J = -6651,2J$

Il rendimento del ciclo viene dato dalla relazione (con Q_a il calore totale assorbito):

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_a} = \frac{\Sigma Q_i}{Q_a} = 1 + \frac{Q_{3-1}}{Q_{1-2} + Q_{2-3}} = 1 - \frac{93116,8J}{95686,12J} = 0.027$$