Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2016/17
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 29/9/2017

1) Un cilindro ha pareti rigide che non consentono scambi di calore con l'esterno ed è chiuso da un pistone di massa trascurabile e superficie $A = 0.03\ m^2$, libero di scorrere senza attrito. Il cilindro contiene 1 mole di aria a temperatura ambiente. Al suo interno viene posto un cubetto di rame (calore specifico $c = 385$ J/(kg °C)) di massa $m = 50$ g a temperatura $T_1 = 80$ °C. Il sistema costituito dal cubetto e dall'aria raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura $T_2 = 55$ °C; nel frattempo si osserva che il pistone si è alzato di $h = 4.52$ cm rispetto alla precedente condizione di equilibrio. Calcolare la variazione di energia interna dell'aria.
Calcolare inoltre la variazione di entropia del cubetto e dell'aria, considerandola come un gas perfetto biatomico.

2) Un recipiente cilindrico disposto orizzontalmente e munito di un pistone scorrevole, contiene inizialmente un volume di acqua V. Sulla base del cilindro è praticato un piccolo foro di area *s* molto più piccola dell'area di base del cilindro. Si applica al pistone una forza costante che lo sposta facendo fuoriuscire acqua dal foro. Sapendo che il lavoro compiuto dalla forza per svuotare completamente il cilindro è L, calcolare in quanto tempo il cilindro si svuota considerando l'acqua un fluido ideale di densità ρ. Esprimere il risultato in funzione di V, s, L, ρ.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il sistema gas+cubetto di rame è isolato. Il calore ceduto dal cubetto è

$$Q = m\,c\,\Delta T = 0.05 \times 385 \times (80-55) = 481.25\ J$$

e viene assorbito dal gas.
Nella trasformazione il gas compie lavoro per spostare il pistone. La trasformazione è irreversibile quindi il lavoro del gas è uguale e opposto al lavoro delle forze esterne. Dato che il pistone non ha massa, si deve considerare il lavoro della forza dovuta alla pressione atmosferica

$$L_{ext} = -p_{atm}Sh = 10^5 \times 0.03 \times 0.0452 = -135.6\ \text{J}$$
$$\Delta\text{U} = Q - L = Q - \left(-L_{ext}\right) = Q + L_{ext} = 481.25 - 135.6 = 345.65\ \text{J}$$

Ricaviamo ora la temperatura iniziale T_0 del gas biatomico (cv = 5/2 R)

$$\Delta\text{U} = nc_v\left(T_f - T_0\right)$$
$$T_0 = T_f - \frac{\Delta\text{U}}{nc_v} = \left(273+55\right) - \frac{345.65}{2.5 \times 8.31} = 311.36\ \text{K} = 38.36\ °\text{C}$$

La pressione del gas nello stato iniziale di equilibrio è uguale alla pressione atmosferica (dato che il pistone non ha massa). Per cui si può ricavare il volume iniziale dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_{atm}} = 0.02587\ \text{m}^3$$

Il volume finale è $V_f = V_0 + Sh = 0.02587 + 0.03\ 0.0452 = 0.027226\ m^3$
Calcoliamo l'entropia di gas e cubetto

$$\Delta S_{cubetto} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc\,dT}{T} = mc\ln\frac{T_f}{T_i} = 0.05 \times 385 \times \ln\frac{(273+53)}{(273+80)} = -1.4139\ \text{J/K}$$
$$\Delta S_{gas} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{dU + pdV}{T} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{CdT + pdV}{T} = nc\ln\frac{T_f}{T_0} + nR\ln\frac{V_f}{V_0} = \frac{5}{2}R\ln\frac{(273+55)}{(273+38.36)} + R\ln\frac{0.027226}{0.02587} = 1.5061\ \text{J/K}$$

Esercizio 2

Detta A l'area della base del cilindro, la pressione esercitata dalla forza F è p=F/A.
Dato che la forza è costante, si può scrivere il lavoro L come forza per spostamento Δl

$$L = F\Delta l = pS\Delta l = pV$$

da cui si ricava la pressione che agisce sul pistone dovuta alla forza F, p = L/V
Applichiamo ora il teorema di Bernoulli, considerando un punto del fluido a contatto con il pistone e un punto all'uscita del foro.
Dato che A>>s (sezione del foro), per l'equazione di continuità la velocità del fluido a contatto con il pistone è nulla. Sia v la velocità all'uscita del foro. Applicando il teorema di Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_{atm} = p + p_{atm}$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{L}{V}$$

$$v = \sqrt{\frac{2L}{\rho V}}$$

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = sv$$

$$\Delta t = \frac{V}{sv} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{\rho V^3}{2L}}$$