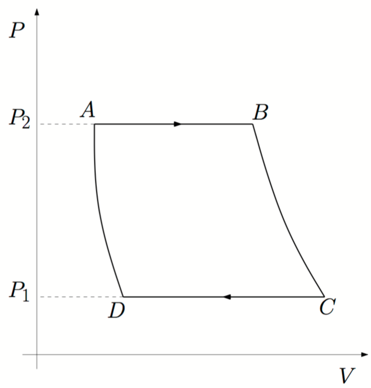
Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2016/17
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 16/6/2017

Chi fa l'esame completo svolga tutti gli esercizi.
Chi ha superato la 1° prova in itinere svolga gli esercizi 2 e 3.

1) Un corpo di massa m = 500 g e di densità doppia rispetto all'acqua è sospeso ad una fune inestensibile ed è completamente immerso in un recipiente pieno d'acqua. Il corpo si trova ad una distanza h = 1 m dal fondo del recipiente. Calcolare:
   a) la tensione T della fune;
   b) la velocità con cui il corpo raggiunge il fondo del recipiente dopo che la fune è stata tagliata

2) Una macchina termica reversibile assorbe calore una sorgente di capacità termica $C_1=10^5$ J/K e a temperatura iniziale T_1=400 K e cede calore ad un blocco di ghiaccio di massa M=10 kg a temperatura T_0=0°C. La macchina funziona finché tutto il ghiaccio si è sciolto. Calcolare la temperatura finale della sorgente calda e l'efficienza della macchina. [Calore latente di fusione del ghiaccio λ_f= 333 kJ/kg]

3) Una mole di gas perfetto monoatomico è sottoposta al ciclo termodinamico di figura che consiste di due trasformazioni isobare reversibili e due adiabatiche reversibili.
   a) Rappresentare il ciclo nel piano T-S dopo avere determinato come la temperatura varia in funzione dell'entropia S nelle trasformazioni isobare.
   b) Calcolare il rendimento di una macchina termica che lavora secondo tale ciclo, esprimendo il rendimento in funzione delle pressioni P_1 e P_2 indicate nel grafico.
   c) Se le trasformazioni adiabatiche fossero invece irreversibili, cioè la pressione in B variasse bruscamente da P_2 a P_1, e viceversa in D da P_1 a P_2, quale sarebbe il rendimento della macchina? Esprimere il rendimento in funzione delle pressioni P_1 e P_2 e del rapporto $k= V_A/V_B$.



SOLUZIONI

Esercizio 1

a) Per calcolare la tensione della fune basta applicare l'equilibrio delle forze:

$$\vec{F}_{net} = \vec{T} + \vec{F}_A + \vec{F}_g = 0$$

ove $F_A = m_f\, g$ è la spinta di Archimede ed $F_g = mg$ è la forza peso. Proiettando l'equazione vettoriale sull'asse y verticale si ottiene:

$$T + F_A - F_g = 0$$
$$T = F_g - F_A = mg - m_f g = (\rho - \rho_f)Vg$$

Sapendo che il corpo ha densità doppia rispetto al fluido si ottiene:

$$\begin{aligned} T &= (\rho - \rho_f)Vg \\ &= (2\rho_f - \rho_f)Vg \\ &= \rho_f Vg = \rho_f \frac{m}{2\rho_f} g \\ &= \frac{mg}{2} = \frac{0.5kg}{2} \times 9.8\, m/s^2 = 2.45\, N \end{aligned}$$

b) Dopo che la fune è stata tagliata il corpo è soggetto ad una forza netta non nulla

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_A + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

Proiettando sull'asse y l'equazione precedente si ottiene l'accelerazione a di cui risente il corpo:

$$\begin{aligned} F_A - F_g &= ma \\ a &= \frac{F_A - F_g}{m} \\ &= \frac{m_f g - mg}{m} \\ &= \frac{(\rho_f - \rho)Vg}{\rho V} = \frac{(\rho_f - 2\rho_f)}{2\rho_f} g = -\frac{g}{2} \end{aligned}$$

La velocità con cui il corpo giunge sul fondo del recipiente, partendo da una distanza h = 1 m, è quindi pari a:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) = -2ah = 2\frac{g}{2}h = gh$$
$$v = \sqrt{gh} = 3.13\ m/s$$

Esercizio 2

Applichiamo l'uguaglianza di Clausius tenendo conto che la temperatura della sorgente calda non è costante, ma varia con continuità, mentre invece quella della sorgente fredda è costante finché il ghiaccio non è completamente sciolto.

Il calore infinitesimo assorbito dalla macchina è $dQ_1 = - C\,dT$
dove $dT < 0$ è la variazione di temperatura della sorgente a seguito della cessione di calore dQ_1 alla macchina.
Il calore ceduto al ghiaccio è invece $Q_0 = -M\lambda = -33.3\times 10^5$ J

$$-\int_{T_1}^{T} \frac{C_1\,dT}{T} - \frac{M\lambda}{T_0} = 0$$

$$\ln\frac{T}{T_1} = -\frac{M\lambda}{T_0}$$

$$T = T_1 \exp\left(-\frac{M\lambda}{C_1 T_0}\right) = 400\exp\left(-\frac{10\times 333\times 10^3}{10^4\times 273}\right) = 400\exp\left(-\frac{10\times 333\times 10^3}{10^5\times 273}\right) = 354K$$

Il calore totale assorbito dalla macchina è $Q_1 = -C(T-T_1) = 46\times 10^5$ J
Il lavoro è $L = Q_1 - Q_0 = 12.7\times 10^5$ J
Il rendimento $L/Q_1 = 0.276$

Esercizio 3

a) Le adiabatiche reversibili sono isoentropiche e quindi rappresentate da segmenti verticali nel piano TS

Per le isobare invece

$$S(T) - S_A = \int_{T_A}^{T} \frac{nc_v dT}{T} + \int_{T_A}^{T} \frac{pdV}{T} = \int_{T_A}^{T} \frac{nc_v dT}{T} + \int_{T_A}^{T} \frac{nRdT}{T} = nc_p \ln\frac{T}{T_A}$$

$$\frac{T}{T_A} = \exp\left[\frac{S(T)-S_A}{nc_p}\right]$$

Quindi nelle trasformazioni AB e CD si hanno rami di esponenziali.

b) Calcoliamo lavoro, calore e variazione di energia interna in ciascuna trasformazione.
Nell'espansione isobara AB, $V_B > V_A \rightarrow T_B > T_A$

$$L_{AB} = p_2(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) > 0$$

$$\Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A) > 0$$
$$Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) > 0$$

Nella compressione isobara CD, $V_C > V_D \rightarrow T_C > T_D$

$$L_{CD} = p_1(V_D - V_C) = nR(T_D - T_C) < 0$$

$$\Delta U_{CD} = nc_V(T_D - T_C) < 0$$

$$Q_{CD} = nc_P(T_D - T_C) < 0$$

Nell'espansione adiabatica BC $Q_{BC}=0$

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B)$$

$$p_2 T_B^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_1 T_C^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Nell'espansione adiabatica DA $Q_{DA}=0$

$$L_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_V(T_A - T_D)$$

$$p_2 T_A^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_1 T_D^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Poiché

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-2/5} > 1$$

$$\frac{T_A}{T_D} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-2/5} > 1$$

Quindi

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B) > 0$$

$$L_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_V(T_A - T_D) < 0$$

Inoltre dalle trasformazioni adiabatiche segue

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{T_A}{T_D}$$

$$\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B}$$

$$L_{TOT} = -nc_V(T_C - T_B + T_A - T_D) + nR(T_D - T_C + T_B - T_A) = nc_p(T_D - T_C + T_B - T_A)$$

$$Q = nc_p(T_B - T_A)$$

$$\eta = \frac{(T_D - T_C + T_B - T_A)}{(T_B - T_A)} = 1 + \frac{(T_D - T_C)}{(T_B - T_A)} = 1 + \frac{T_C}{T_B}\frac{\left(\frac{T_D}{T_C} - 1\right)}{\left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right)} = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{2/5}$$

c) Nel caso le adiabatiche siano irreversibili, non si possono più utilizzare le trasformazioni (adiabatiche reversibili) che legano le grandezze degli stati B e C, e A e D.
Però possiamo scrivere il lavoro delle adiatiche in termini del lavoro esterno fatto sul sistema

$$L_{BC} = -L_{ext} = p_1(V_C - V_B) = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B)$$

$$L_{DA} = -L_{ext} = p_2(V_A - V_D) = -\Delta U_{DA} = -nc_V(T_A - T_D)$$

$$\begin{aligned} L_{TOT} &= p_1(V_C - V_B) + p_2(V_A - V_D) + nR(T_D - T_C + T_B - T_A) \\ &= nRT_C - p_1V_B - p_2V_D + nRT_A + nR(T_D - T_C + T_B - T_A) = nR(T_D + T_B) - p_1V_B - p_2V_D \end{aligned}$$

$$L_{TOT} = nR(T_D + T_B) - p_1V_B - p_2V_D = (p_2 - p_1)(-V_D + V_B)$$

$$\eta = \frac{(p_2 - p_1)(-V_D + V_B)}{nc_p(T_B - T_A)} = \frac{(p_2 - p_1)(-V_D + V_B)}{c_p \frac{p_2}{R}(V_B - V_A)} = \frac{R}{c_p}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)\frac{(V_B - V_D)}{(V_B - V_A)}$$

Si può ricavare V_D in funzione di V_A dall'espressione di L_{DA}

$$p_2(V_A - V_D) = -nc_V(T_A - T_D) = -\frac{c_V}{R}(p_2V_A - p_1V_D)$$

$$p_2V_A\left(1 + \frac{c_V}{R}\right) = \left(p_2 + \frac{c_V}{R}p_1\right)V_D$$

$$V_D = p_2V_A\frac{\left(1 + \frac{c_V}{R}\right)}{\left(p_2 + \frac{c_V}{R}p_1\right)}$$

$$\eta = \frac{R}{c_p}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)\frac{\left(V_B - V_A\frac{\left(1 + \frac{c_V}{R}\right)}{\left(p_2 + \frac{c_V}{R}p_1\right)}p_2\right)}{(V_B - V_A)} = \frac{R}{c_p}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)\frac{\left(1 - k\frac{\left(1 + \frac{c_V}{R}\right)}{\left(p_2 + \frac{c_V}{R}p_1\right)}p_2\right)}{(1 - k)}$$