

Università degli Studi di Siena  
Corso di Laurea FTA - A.A. 2015/16  
Corso di Fluidi e Termodinamica  
Prova in itinere del 20/5/2016

*Chi fa l'esame completo svolga gli esercizi 1,3,4.*

*Chi ha superato la 1° prova in itinere svolga gli esercizi 2,3,4.*

- 1) In un recipiente pieno di acqua, aperto superiormente è praticato un foro di area molto più piccola della sezione del recipiente. Il rapporto fra la sezione del foro e quella del recipiente è  $r=0.05$ . L'acqua fuoriesce dal foro e il recipiente si svuota completamente in 12 s. Calcolare l'altezza iniziale del liquido e la velocità iniziale con cui l'acqua fuoriesce dal foro.
  
- 2) Due macchine termiche R ed I lavorano entrambe con due sorgenti a temperatura  $T_2 = 300\text{ K}$  e  $T_1 < T_2$ .  
R è reversibile e funziona in ciclo inverso, cioè assorbe calore  $Q_1$  dalla sorgente  $T_1$ , e cede calore  $Q_2$  alla sorgente  $T_2$ . La macchina I è irreversibile e funziona in ciclo diretto, assorbendo dalla sorgente  $T_2$  proprio la stessa quantità di calore  $Q_2$  ceduta da R, e cedendo a  $T_1$  una quantità di calore  $|q_1| = 3/2 |Q_1|$ .  
Il lavoro totale compiuto dalla macchina I+R ha valore assoluto  $|L| = 4000\text{ J}$ .
  - a) Qual è il segno di L? Giustificare la risposta.
  - b) Calcolare  $Q_2$ , sapendo che R, quando lavora in ciclo diretto fra le stesse due sorgenti, ha rendimento 60%
  - c) Quanto vale il rendimento della macchina I?
  
- 3) Due moli di gas perfetto monoatomico inizialmente alla pressione  $p_0=4\text{ atm}$  e volume  $V_0=20\text{ litri}$ , si espandono seguendo la legge  $pV^2 = \text{costante}$ , fino ad un volume finale doppio di quello iniziale  $V_0$ .  
Calcolare il lavoro compiuto, il calore scambiato e la variazione di entropia nella trasformazione.
  
- 4) A quale temperatura atomi di ossigeno hanno la stessa velocità quadratica media di atomi di idrogeno alla temperatura di  $20\text{ °C}$ ? Calcolare inoltre la velocità media e la velocità più probabile per gli atomi di ossigeno.

## SOLUZIONI

4)

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Per idrogeno  $M=1$   $T=293$  K . Nota che la massa molare  $M$  è espressa in g, quindi va convertita in kg nella formula della velocità quadratica media

$$v_{qm}(H) = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \cdot 293}{10^{-3}}} = 2703 \text{ m/s}$$

$$v_{qm}(O) = \sqrt{\frac{3 R T_o}{16 \cdot 10^{-3}}} = v_{qm}(H)$$

da cui

$$T_o = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{3R} v_{qm}(H)^2 = 4689 \text{ K}$$

$$\langle v(O) \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 2490 \text{ m/s}$$

$$v_{pp}(O) = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 2206 \text{ m/s}$$

3)

$$p_0 V_0^2 = p_1 V_1^2$$

$$p_1 = \frac{p_0 V_0^2}{V_1^2} = \frac{p_0 V_0^2}{4V_0^2} = \frac{p_0}{4} = 1 \text{ atm}$$

La temperatura iniziale e finale si ricava dalla equazione dei gas perfetti

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{nR} = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8.31} = 480 \text{ K}$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8.31} = 240 \text{ K}$$

$$L = \int p dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^2}{V^2} dV = p_0 V_0^2 \left( \frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_1} \right) = 4 \cdot 10^5 (20 \cdot 10^{-3})^2 \left( \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{40 \cdot 10^{-3}} \right) \\ = 4000 \text{ J}$$

$$\Delta U = n c_V (T_1 - T_0) = -5983.2 \text{ J}$$

$$Q = \Delta U + L = -5983.2 + 4000 = -1983.2 \text{ J}$$

$$\Delta S = \int \frac{p dV}{T} + \int \frac{n c_V dT}{T}$$

Dato che l'entropia è una funzione di stato, possiamo calcolarla considerando due trasformazioni che abbiano come risultato lo stesso stato finale, la prima isoterma da  $(p_0, V_0, T_0)$  a  $(p_1, V^*, T_0)$ , seguita da una isobara da  $(p_1, V^*, T_0)$  a  $(p_1, V_1, T_1)$ .

$$V^* = p_0 V_0 / p_1 = 80 \text{ l}$$

$$\Delta S_{isoterma} = \int_{V_0}^{V^*} \frac{p dV}{T} = \int_{V_0}^{V^*} nR \frac{dV}{V} = nR \ln \left( \frac{V^*}{V_0} \right) = 23.04 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{isobara} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{n c_V dT}{T} + \int_{V^*}^{V_1} \frac{p_1 dV}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{n c_V dT}{T} + \int_{V^*}^{V_1} \frac{nR dV}{V} \\ = n \frac{3}{2} R \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) + nR \ln \left( \frac{V_1}{V^*} \right) = (-17.28 - 11.52) \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{isoterma} + \Delta S_{isobara} = -5.76 \text{ J/K}$$

1)

Siano  $v_1$  e  $p_1$  la velocità e la pressione dell'acqua alla superficie del liquido e  $v_2$  e  $p_2$  all'altezza del foro. Considerando l'acqua un fluido ideale, vale l'equazione di Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

dove  $h$  indica il livello della superficie libera dell'acqua misurata a partire dal foro. Applicando l'equazione di continuità

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} \ll v_2$$

per cui possiamo trascurare  $v_1 (=0)$  e scrivere

$$p_1 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$p_0$  è uguale a  $p_1$  e alla pressione del pistone

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Possiamo scrivere l'equazione per la portata, dove  $S_2$  è la sezione del foro e  $S_1$  la sezione del recipiente

$$-\frac{dV}{dt} = -\frac{d(S_1 h)}{dt} = Q = S_2 v_2 = S_2 \sqrt{2gh}$$

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gh} = r \sqrt{2gh}$$

$$-\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = r \int_0^T dt$$

dove  $H$  è l'altezza iniziale e  $T$  il tempo totale per lo svuotamento.

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = rT$$

$$H = \frac{gr^2 T^2}{2} = \frac{9.8 \cdot 0.05^2 \cdot 1.32^2}{2} = 1.764 \text{ m}$$

$$v_{ini} = \sqrt{2gH} = 5.88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2) La macchina I+R produce un lavoro  $L = Q_1 + q_1$  lavorando con una sola sorgente ( $T_1$ ) dato che  $q_2 = -Q_2$ . Per non violare il secondo principio deve essere  $L < 0$ .

Calcoliamo  $Q_1$  e  $q_1$ , che hanno segno rispettivamente  $Q_1 > 0$  e  $q_1 < 0$

$$q_1 = -3/2 Q_1$$

$$L = Q_1 - 3/2 Q_1 = -1/2 Q_1 = -4000 \quad \text{da cui} \quad Q_1 = 8000 \text{ J} \quad \text{e} \quad q_1 = -12000 \text{ J}$$

Quando R lavora in ciclo diretto assorbe calore  $-Q_2$  e cede calore  $-Q_1$

$$\eta_R = \frac{-Q_1 - Q_2}{-Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.6$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = -1 + 0.6 = -0.4$$

$$Q_2 = -\frac{Q_1}{0.4} = -\frac{8000}{0.4} = -20000 \text{ J}$$

$$\eta_I = 1 + \frac{q_1}{q_2} = 1 + \frac{-12000}{20000} = 0.4$$