Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2015/16
Corso di Fluidi e Termodinamica
Prova in itinere del 21/4/2016

1) Un grande recipiente cilindrico alto 10 m aperto superiormente contiene dell'acqua.

Alla base del cilindro è presente un piccolo foro da cui l'acqua può fuoriuscire.

Calcolare quale deve essere la sezione del foro affinché l'acqua in uscita possa avere una potenza di almeno 10 kW.

Qual è la forza minima che si deve esercitare su di un tappo per chiudere il foro?

2) Un piccolo blocchetto di legno di superficie S=100 cm^2 è spinto da una forza F (orizzontale) sulla superficie di un torrente di profondità H=2 m. Dopo un certo tempo, la velocità del blocchetto di legno diventa costante con valore v_0= 5 m/s.

Quanto vale la forza F?

Come varia la velocità delle lamine di liquido in funzione della profondità?

Il coefficiente di viscosità dell’acqua è η = 10^3 Pa s. Il regime di flusso del torrente è laminare.

3) Una lastra di ghiaccio di base A e spessore iniziale D = 1 mm è interposta fra due ambienti a temperatura 20 °C e 0 °C rispettivamente. Calcolare come varia lo spessore x della lastra in funzione del tempo. Il coefficiente di conducibilità termica del ghiaccio è k=2.2 W m^{-1} C^{-1} e il calore latente di fusione λ= 333 kJ/kg.

In quanto tempo lo spessore della lastra si dimezza rispetto al valore iniziale?

SOLUZIONI

1) Assumendo che il foro abbia dimensioni molto piccole rispetto alla base del cilindro, dal teorema di Torricelli sappiamo che la velocità di uscita dell'acqua dal foro è

$v=\sqrt{2gh}$

La forza esercitata dal flusso di acqua in uscita si ricava dal teorema dell'impulso

$F\,dt = dm\,v = \rho\,S\,v\,dt\,v = \rho\,S\,v^2\,dt$

$F = \rho\,S\,v^2$

La potenza sviluppata è P = Fv

$P = \rho\,S\,v^3$

Da cui si ricava $S = \frac{P}{\rho\,v^3} = \frac{P}{\rho\,(2gh)^{1.5}} = \frac{10^4}{10^3(2\;9.8\;10)^{1.5}} = 3.64\times 10^{-3}\;\;m^2$

La forza necessaria per chiudere il foro con un tappo è

$$F_t = p\,S = (p_{atm} + \rho g h)S = (10^5 + 10^3\;9.8\;10)\;3.64\;10^{-3} = 720.7\;\;N$$

2) La forza di resistenza viscosa F_R dell'acqua si oppone allo scorrimento del blocchetto di legno. All'equilibrio tale forza sarà uguale alla forza F che spinge il blocchetto e pertanto questo si muoverà con velocità costante, dato che la risultante delle forze agenti su di esso è nulla.

La forza di viscosità è data dalla formula di Newton

$$F_R = S\,\eta\,\frac{dv}{dh}$$

dove dv/dh è il gradiente di velocità delle lamine di acqua rispetto alla loro profondità h nel torrente. Lo strato adiacente al fondo è fermo. Ogni strato esercita sul sovrastante una forza F_R ed è soggetto a $-F_R$ dallo strato sottostante.

Pertanto F_R non dipende da h e quindi

dv/dh = costante da cui $v = v_0/H\;h$ (velocità delle lamine in funzione della profondità)

Sostituendo nella prima equazione si ricava

$F = F_R = S\,\eta\,\frac{v_0}{H} = S\,\eta v_0 = 10^{-2}\;\;10^{3}\;\;5/2 = 25$ N

3) Applichiamo l'equazione di Fourier per la propagazione del calore

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{(T_1 - T_2)}{x} = kA\frac{\Delta T}{x}$$

Il calore dQ che si propaga lungo la lastra fa sciogliere una quantità di ghiaccio dm

$$dQ = \lambda\, dm = -\lambda\rho A\, dx$$

dove abbiamo scritto dm = ρ dV= - ρ A dx, e il segno – deriva dal fatto che dx = d(D-x) cioè è lo strato infinitesimo di ghiaccio sciolto. Combinando le due equazioni troviamo

$$-\frac{\lambda\rho A\, dx}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$$

$$-x\, dx = \frac{k\Delta T}{\lambda\rho}dt$$

e integrando entrambi i membri

$$\int_D^x x\, dx = -\frac{k\Delta T}{\lambda\rho}\int_0^t dt$$

si ottiene

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{D^2}{2} = \frac{k\Delta T}{\lambda\rho}t$$

$$x = \sqrt{D^2 - 2\frac{k\Delta T}{\lambda\rho}t}$$

Il tempo necessario affinché lo spessore si dimezzi è

$$t_{1/2} = \frac{\lambda\rho}{k\Delta T}\frac{3D^2}{8} = \frac{333\ 10^3\ 10^3\ 3\ 10^{-6}}{2.2\ 20\ 8} = 2.83\ s$$