Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2014/15
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 4/9/2015

1) Dell'acqua scorre in un tubo di diametro variabile. In un punto A di diametro 20 cm la pressione vale 1.75×10^5 Pa. In un punto B di diametro 30 cm e situato a 4 m di altezza rispetto ad A, la pressione è 1.2×10^5 Pa. Sapendo che la portata dell'acqua è costante nel tubo e pari a 0.1 m^3/s, trovare l'energia per unità di volume dissipata dall'acqua nel muoversi dal punto A a B.

2) Un cilindro chiuso da un pistone mobile su cui agisce la pressione atmosferica p_0, è riempito di gas perfetto monoatomico; il gas si trova inizialmente alla temperatura T_0 e il suo volume è V_0. A partire dal tempo t=0 si fornisce al gas una quantità di calore variabile nel tempo secondo la legge:

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

dove Q_0 e τ sono dati noti.

a) Graficare la funzione Q(t) e calcolare il calore totale assorbito dal gas in un intervallo di tempo pari a 2τ.

b) Di che tipo di trasformazione si tratta? La pressione varia nel tempo?

c) Scrivere come variano T e V in funzione del tempo.

d) Calcolare la variazione di entropia del gas fra t=0 e t=2τ.

SOLUZIONI

1) Applichiamo Bernoulli considerando nel bilancio energetico per il punto B anche l'energia E_d dissipata dall'acqua

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h + E_d$$

$$E_d = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 - p_B - \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho g h$$

Per calcolare v_A e v_B utilizziamo l'equazione di continuità Q = Sv dove Q = 0.1 m^3/s è la portata

v_A=Q/S_A= 0.1/(π 0.1^2) = 3.185 m/s
v_B=Q/S_B= 0.1/(π 0.15^2) = 1.415 m/s

$$E_d = 1.75\ 10^5 + \frac{1}{2}10^3\ 3.185^2 - 1.2\ 10^5 - \frac{1}{2}10^3\ 1.415^2 - 10^3\ 9.8\ 4 = 19871\ J/m^3$$

2) La trasformazione è isobara perché la pressione che agisce sul pistone è costante pari alla pressione atmosferica. Inoltrè e è reversibile perché il calore assorbito varia con continuità e quindi dal primo principio della termodinamica analogamente variano V e T.

Il calore totale assorbito fra t=0 e t = 2τ

$$\int_0^{2\tau} Q(t)\,dt = \int_0^{2\tau}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)Q_0 dt = Q_0\left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Big|_0^{2\tau} = Q_0(\tau + \tau e^{-2})$$

Per ricavare l'espressione di T(t), si noti che essendo isobara reversibile dQ = n c_p dT

$$dQ = \frac{Q_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = n\,c_p dT$$

$$\int_{T_0}^{T} dT = \int_0^t \frac{Q_0}{n\,c_p\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt$$

$$T = T_0 + \frac{Q_0}{n\,c_p}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

A questo punto per ricavare V utilizzo il primo principio della termodinamica

$$dU = \ \delta Q - p_0 dV$$

$$nc_V dT = nc_p dT - p_0 dV$$
$$n(c_p - c_V)dT = p_0 dV$$
$$nRdT = p_0 dV$$

$$\frac{nR}{p_0}\frac{dT}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{nR}{p_0}\frac{Q_0}{n\, c_p \tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t \frac{R}{p_0}\frac{Q_0}{c_p \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$V = V_0 + \frac{RQ_0}{p_0\, c_p}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

La variazione di entropia è

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{T(2\tau)} \frac{nc_p dT}{T} = nc_p\, ln\left(\frac{T(2\tau)}{T_0}\right) = nc_p\, ln \frac{T_0 + \frac{Q_0}{n\, c_p}(1 - e^{-2})}{T_0}$$