Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2013/14
Fluidi e Termodinamica
Esame del 7/7/2014

1) Una sfera di un materiale di densità 9 $g/cm^3$ galleggia sul mercurio (densità 13.6 $g/cm^3$) restando immersa per 1/5 del volume. La sfera è piena o contiene una cavità? Motivare la risposta. Se contiene una cavità, qual è la frazione di volume della sfera che la cavità occupa?

2) Una mole di gas perfetto monoatomico di volume iniziale pari a 2 litri e a pressione 10 atm è contenuta in un cilindro a pareti adiabatiche munito di un pistone di sezione $S=100\ cm^2$. Sul fondo del cilindro è posta una resistenza elettrica (di volume trascurabile) di potenza di 20 W che alimentata per 5 minuti libera lentamente energia sotto forma di calore. Calcolare la temperatura finale del gas dopo il riscaldamento della resistenza e di quanto si alza il pistone durante l'espansione del gas.

3) Una macchina termica esegue cicli termodinamici reversibili lavorando con due sorgenti a temperature iniziali $T_1$ e $T_2>T_1$. Assumendo che le due sorgenti abbiano la stessa capacità termica C e che la pressione esterna sia costante, dimostrare che la temperatura finale delle due sorgenti è $T_f = (T_1T_2)^{1/2}$. Calcolare inoltre il lavoro totale compiuto dalla macchina termica fino al raggiungimento dell'equilibrio e il suo rendimento.

**SOLUZIONI**

**ESERCIZIO 1**

Sia d = 9 g/cm$^3$ la densità del materiale e d' = 13.6 g/cm$^3$ la densità del liquido. La condizione per l'equilibrio è data uguagliando la forza peso della sfera alla spinta di archimede

$$\rho' \frac{V}{5} g = \rho V g$$

$$\rho' = 5\rho$$

che non è chiaramente soddisfatta. Per cui la sfera deve essere cava. Indicando con V'< V il volume della cavità deve valere

$$\rho' g \frac{V}{5} = \rho (V - V') g$$

da cui

$$V' = V\left(1 - \frac{1}{5}\frac{\rho'}{\rho}\right) = 0.697\, V$$

**ESERCIZIO 2**

Considerando il riscaldamento lento, possiamo considerare che il pistone si innalzi lentamente mantenendosi in equilibrio con la pressione esterna, e quindi l'espansione è isobarica reversibile. Dal primo principio

Q = $\Delta$U+ L dove Q = Pt è l'energia fornita al gas dalla resistenza sotto forma di calore

$Pt = n\, c_v\, (T_f - T_i) + p\, (V_f - V_i)$ (eq.1)

La temperatura iniziale si ricava dalla legge dei gas perfetti $T_i = p\, V_i / (nR) = 10^6\, 2\, 10^{-3}/8.31 = 240.7$ K

La trasformazione è isobarica quindi $T_f / T_i = V_f / V_i$

Sostituendo queste due espressioni in eq.1

$Pt = n\, c_v\, T_i\, (V_f/V_i - 1) + p\, (V_f - V_i) = (V_f - V_i)\, (n\, c_v\, T_i / V_i + p)$

da cui ricava

$$V_f - V_i = \frac{Pt}{p + nc_v \frac{T_i}{V_i}} = \frac{20\times5\times60}{10^6 + 1.5\times8.31\times\frac{240.7}{2\times10^{-3}}} = 0.0024\ m^3$$

L'innalzamento $\Delta x = (V_f - V_i)/S = 0.0024/(100\ x10^{-4})=24$ cm

**ESERCIZIO 3**

La trasformazione è reversibile quindi

$$\Delta S = \Delta S_{macchina} + \Delta S_{sorgente} = 0$$

Ma $\Delta S_{macchina} = 0$ quindi anche $\Delta S_{sorgente} = 0$
La variazione di entropia di una sorgente è

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C\delta T}{T} = C\ ln\frac{T_f}{T_i}$$

$$\Delta S_{sorgente} = C\ ln\frac{T_f}{T_1} + C\ ln\frac{T_f}{T_2} = 0$$

da cui $ln\frac{T_f}{T_1} = -\ ln\frac{T_f}{T_2}$

$$\frac{T_f}{T_1} = \frac{T_2}{T_f}$$

$$T_f = \sqrt{T_2 T_1}$$

Il lavoro è $L= -(Q_2 + Q_1)$
dove $Q_2$ e $Q_1$ rappresentano il calore scambiato dalle sorgenti

$Q_2= C\ (T_f-T_2)$
$Q_1= C\ (T_f-T_1)$

$L = -C\ (T_f-T_2)-C\ (T_f-T_1) = C\ (T_2-2T_f +T_1)$

Il rendimento è $L/Q_2 = (T_2-2T_f +T_1)/(T_f-T_2)$