Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2013/14
Fluidi e Termodinamica
Esame del 9/5/2014

1) Un pallone aereostatico (o mongolfiera) per esperimenti scientifici nell'atmosfera deve sollevare uno strumento che pesa 100 kg, di volume trascurabile. Il pallone è gonfiato con elio (densità 0.2 kg/m^3) fino a diventare una sfera di raggio R. Il pallone inizia a salire e raggiunge la quota di 1000 m in 10 s. Assumendo che densità dell'aria sia costante con la quota e pari a 1 kg/m^3, calcolare il raggio R del pallone in due distinti casi: a) resistenza dell'aria trascurabile; b) resistenza dell'aria proporzionale alla velocità del pallone con coefficiente di proporzionalità k=0.1 Ns/m (trascurare la fase transiente).

2) Un gas perfetto monoatomico esegue un ciclo termodinamico reversibile costituito da: una compressione isocora dallo stato iniziale A allo stato B in cui la temperatura si riduce ad un terzo del valore iniziale; un'espansione isobara dallo stato B a C in cui il volume raddoppia; una trasformazione rappresentata da una retta nel piano di Clapeyron che riporta il sistema da C in A. Sapendo che V_c = 20 litri e il lavoro compiuto nel ciclo è L = 4 litri atm, calcolare la pressione nei 3 stati. Calcolare inoltre il lavoro eseguito dal sistema nella trasformazione CA.

3) Un flusso di aria scorre in un tubo orizzontale di lunghezza praticamente infinita. In un punto A del condotto l'aria è riscaldata per mezzo di una resistenza; la sua densità nel tratto di tubo successivo ad A è minore del 30% rispetto alla densità dell'aria (1 kg/m^3) prima di A. Prima di A la pressione del flusso è 1 atm e la sua velocità 1 m/s. Calcolare pressione e velocità del flusso di aria nel tratto di tubo successivo al punto A.

4) Un gas è racchiuso in una bombola indeformabile alla temperatura di 20°C e alla pressione di 5.0 atm. (a) Se la bombola viene immersa nell'acqua bollente a 100°C, che valore assume la pressione del gas all'equilibrio termico? (b) Sempre tenendo il gas in equilibrio termico con l'acqua bollente, quale frazione della massa molare di gas contenuto è necessario lasciar uscire per riportare la pressione al valore di 5 atm ? (c) Se il gas rimasto viene riportato alla temperatura di 20°C, qual è la pressione finale?

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) senza attrito aria $(m+M)\, a = -Mg - mg + \rho_a\, 4/3\, \pi\, R^3\, g$

dove m è la massa di elio $m = \rho_{He}\, 4/3\, \pi\, R^3$ e M la massa dello strumento. Per salire in quota l'accelerazione a > 0 cioè la spinta di Archimede deve essere maggiore della somma di pesi di pallone e carico.

$$\boldsymbol{a} = \frac{(\rho_a - \rho_{He})\ \boldsymbol{\frac{4}{3}}\pi R^3 - M}{\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\frac{4}{3}}\pi R^3 \rho_{He}}\, \boldsymbol{g}$$

$h=1/2\, a\, t^2$ da cui sostituendo si ricava

$$\frac{(\rho_a - \rho_{He})\ \boldsymbol{\frac{4}{3}}\pi R^3 - M}{\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\frac{4}{3}}\pi R^3 \rho_{He}}\, \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\frac{2h}{t^2}}$$

Risolvendo rispetto ad R

$$\left(\rho_a - \rho_{He} - \rho_{He} \boldsymbol{\frac{2h}{gt^2}}\right) \boldsymbol{\frac{4}{3}}\pi R^3 = \boldsymbol{M} \boldsymbol{\frac{2h}{gt^2}} + \boldsymbol{M}$$

$$R = \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{3}{4\pi}} \frac{\left(\boldsymbol{\frac{2h}{gt^2}} + \boldsymbol{1}\right)\boldsymbol{M}}{\left(\rho_a - \rho_{He} - \rho_{He} \boldsymbol{\frac{2h}{gt^2}}\right)}} = \boldsymbol{5.7\ m}$$

a) con attrito aria $(m+M)\, a = -Mg - mg + \rho_a\, 4/3\, \pi\, R^3\, g - k\, v$

trascuriamo il transiente (a=0) e consideriamo a regime un moto rettilineo uniforme con velocità

$$\boldsymbol{v} = \frac{(\rho_a - \rho_{He})\ \boldsymbol{\frac{4}{3}}\pi R^3 - M}{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{g}$$

In questo caso h= vt e sostituendo

$$\boldsymbol{\frac{h}{t}} = \frac{(\rho_a - \rho_{He})\ \boldsymbol{\frac{4}{3}}\pi R^3 - M}{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{g}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\frac{\boldsymbol{hk}}{\boldsymbol{gt}}+\boldsymbol{M}}{(\rho_a - \rho_{He})}\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4\pi}}} = \boldsymbol{R} = \mathbf{3.1}\ \boldsymbol{m}$$

Esercizio 2

Nella trasformazione isobora T_B= 1/3 T_A quindi anche p_B= 1/3 p_A
Nella isocora il volume raddoppia. Essendo V_c= 20 l allora V_B=10 l
Rappresentando il ciclo nel piano PV si ottiene un triangolo. L'area del triangolo rappresenta il lavoro totale L = ½ (V_c - V_B) (p_A - p_B)

Si ricava L = ½ 10 2/3 p_A da cui p_A = 2L 3/20 = 24/20= 6/5 atm

p_B=p_C= 1/3 p_A = 2/5 atm

Per calcolare il lavoro in CA occorre trovare l'espressione di p in funzione di V. Essendo una retta

$$\frac{p - p_A}{p_c - p_A} = \frac{V - V_A}{V_c - V_A}$$

$$\frac{p - \frac{6}{5}}{\frac{2}{5} - \frac{6}{5}} = \frac{V - 10}{20 - 10}$$

$$\frac{6}{5} - p = \frac{4}{5}\frac{V - 10}{10}$$

$$p = 2 - \frac{2}{25}V$$

$$L_{CA} = \int_C^A p\, dV = \int_{V_c}^{V_A} \left(2 - \frac{2}{25}V\right) dV$$
$$= 2(V_A - V_C) - \frac{1}{25}(V_A^2 - V_C^2) = -20 - \frac{100 - 400}{25} = -8\ l\ atm$$

Esercizio 3

Deve valere la conservazione dell'energia prima e dopo A, tenendo conto che il calore trasferito dalla resistenza fa variare la densità dell'aria ρ a ρ'=0.7 ρ. Applicando Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \frac{1}{2}\rho' v'^2 + p'$$

Le incognite sono v' e p' velocità e pressione del flusso dopo il punto A.
Applico equazione di continuità ovvero la conservazione della massa di fluido prima e dopo A, tenendo conto della variazione di densità. S è la sezione costante del tubo

$$\Delta m = \Delta m'$$
$$\rho S v = \rho' S v'$$
$$v' = \frac{\rho}{\rho'} v = 1.43\ m/s$$

Sostituendo nell'equazione di Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \frac{1}{2}\rho' \left(\frac{\rho}{\rho'} v\right)^2 + p'$$
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\rho'} v^2 + p'$$
$$p' = p + \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) v^2 = 0.786\ atm$$

Esercizio 4

a) trasformazione isocora p/T = costante $p_f = p_i\ T_f/T_i = 5\ (273+100)/(273+20) = 6.37$ atm

b) Varia la quantità di gas e la pressione. Volume e temperatura costanti.

Sia n numero di moli iniziali e n' dopo aperture della valvola.

Prima $p_f V = nRT_f$ dopo $p'V = n'RT_f$ $p_f = 6.37$ atm $p'=5$ atm

Dividendo le due equazione $n'=n\ p'/p_f = n\ 0.7849$ quindi il numero di moli finali è diminuito del 21.5%

c) Il gas torna a temperatura con trasformazione a volume costante $p_2 = p'\ T_i/T_f = 5\ (273+20)/(273+100) = 3.92$ atm