Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2012/13
Corso di Fluidi e Termodinamica
Esame del 9/7/2013

1) Un recipiente cilindrico di sezione $S_1 = 400\ cm^2$ ha un foro di sezione $S_2 = 50\ cm^2$ sul fondo. Inizialmente è riempito di acqua fino ad altezza h=25 cm. La superficie libera dell'acqua è a contatto con l'atmosfera. Scrivere l'equazione differenziale che esprime la variazione in funzione del tempo dell'altezza z del liquido e calcolare il tempo di svuotamento del recipiente.

2) Un ciclo di un gas perfetto monoatomico è costituito da una compressione adiabatica tra gli stati A e B, un'isocora tra gli stati B e C, un'espansione adiabatica tra C e D e infine un'isocora tra D e A. Il rapporto fra i volumi $V_A/V_B=1/3$. Rappresentare il ciclo per un gas perfetto monoatomico nel piano PV e calcolarne il rendimento.

3) Un cubetto di ghiaccio di massa m_0 alla temperatura iniziale di $t_0=0$ °C viene immerso in una massa d'acqua m_1 = 0.2 kg, alla temperatura t_1 = 25 °C. Determinare la massima quantità di ghiaccio che può essere sciolta e la variazione di entropia del sistema. (calore di fusione del ghiaccio λ_f = 333 kJ/kg, calore specifico acqua 4186 J/(kg K)).

SOLUZIONI

1) Equazione di continuità $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(zS_1) = S_2 v_2$

Teorema di Bernoulli $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z = \frac{1}{2}\rho v_2^2$

Sostituendo v_2 dalla prima equazione nella seconda e notando che v_1 = dz/dt, si ricava

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2gz = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2gz}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}$$

Separando le variabili si ottiene $dt = -\sqrt{\frac{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}{2gz}}\ dz$

e integrando

$$\int_0^T dt = -\int_h^0 \sqrt{\frac{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}{2gz}}\ dz$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]} = 1.79\ \text{s}$$

2)

Il sistema compie lavoro solo sulle adiabatiche, e si ottiene

$$L_{C\to D} = U_C - U_D = nc_V\left(T_C - T_D\right) \tag{9.7.1}$$

$$L_{A\to B} = U_A - U_B = nc_V\left(T_A - T_B\right)\,. \tag{9.7.2}$$

Il sistema assorbe calore nell'isocora $B \to C$, e dato che il lavoro è nullo si ottiene

$$Q_{B\to C} = U_C - U_B = nc_V\left(T_C - T_B\right)\,. \tag{9.7.3}$$

In conclusione

$$\eta = \frac{L_{C\to D} + L_{A\to B}}{Q_{B\to C}} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\,. \tag{9.7.4}$$

Utilizzando la relazione $VT^{\gamma-1} =$ costante valida per una adiabatica abbiamo

$$\frac{T_D}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma} \tag{9.7.5}$$

e

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma} \tag{9.7.6}$$

abbiamo

$$\eta = 1 - \frac{\alpha^{1-\gamma}\left(T_C - T_B\right)}{T_C - T_B} = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\,. \tag{9.7.7}$$

3) Detta t_e la temperatura raggiunta all'equilibrio dal sistema (isolato)

$$m_1 c\left(t_e - t_1\right) + m_0\lambda_f + m_0 c\left(t_e - t_0\right) = 0$$

$$m_0 = \frac{m_1 c\left(t_1 - t_e\right)}{\lambda_f + c\left(t_e - t_0\right)}$$

Derivando m_0 rispetto a t_e

$$\frac{dm_0}{dt_e} = \frac{-m_1 c^2 (t_1 + t_0) - m_1 c\lambda_f}{\left[\lambda_f + c\left(t_e - t_0\right)\right]^2} < 0$$

si osserva che la funzione $m_0(t_e)$ è decrescente quindi assume il massimo valore per t_e=0 °C. Pertanto m_0=0.063 kg. La variazione di entropia è

$$\Delta S = m_1 c \ln\frac{T_0}{T_1} + \frac{m_0\lambda_f}{T_0} = +21.69 \text{ J/K}$$