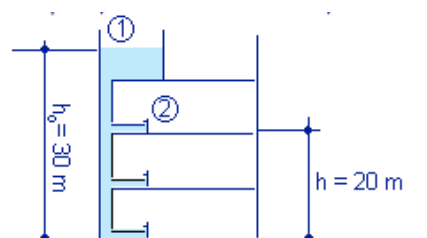


Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2012/13
Corso di Fluidi e Termodinamica
Prova in itinere del 6/6/2013

*Chi non ha superato la 1° prova in itinere svolga gli esercizi 1, 2, 3.
Chi deve fare solo il 2° compito in itinere svolga solo gli esercizi 2,3,4.*

1) Il livello dell'acqua in un serbatoio sul tetto di un edificio è ad un'altezza da terra $h_0 = 30$ m. Il serbatoio fornisce acqua attraverso condutture di sezione $S_1 = 20,0$ cm² ai vari appartamenti. Ogni rubinetto da cui esce acqua ha una sezione di apertura pari a $S_2 = 10,0$ cm². Calcolare:

- Il tempo necessario per riempire un secchio di 30 dm³ in un appartamento a 20 m sopra il livello della strada.
- La pressione differenziale nella condotta principale, a livello del suolo, a rubinetto chiuso e a rubinetto aperto.



2) In un recipiente di volume $V = 20$ l sono contenute 0.5 moli di N_2 ($M=28$) alla temperatura di 27°C. Calcolare:

- la densità dell'azoto all'interno del recipiente;
- la pressione all'interno del recipiente;
- l'energia media traslazionale e la velocità media delle molecole;
- l'energia totale di una singola molecola e l'energia interna del gas.

3) Due moli di un gas ideale biatomico compiono un ciclo reversibile costituito da due trasformazioni adiabatiche AB e CD, collegate da una trasformazione isocora BC e da una isobara DA. Le temperature del gas negli stati A, C e C sono rispettivamente $T_A=250$ K, $T_C= 570$ K e $T_D=300$ K. Si determini

- il lavoro fatto dal gas durante il ciclo;
- il rendimento del ciclo;
- la variazione di entropia nel ciclo.

4) Una bombola di volume V_0 , inizialmente chiusa, contiene $n=3$ moli di un gas ideale a temperatura ambiente $T_0=300$ K ed alla pressione $p_0=2.5 \times 10^6$ Pa. La bombola è collegata tramite un tubo sottile ad un recipiente a volume variabile e pressione costante $p_1=10^5$ Pa. Si apre la valvola di chiusura e il gas fluisce dalla bombola al recipiente molto lentamente, in modo che la temperatura del gas è costantemente uguale a quella dell'ambiente. Si calcoli

- il lavoro fatto dal gas ed il calore ceduto all'ambiente nella trasformazione descritta
- il lavoro che si otterrebbe se il gas venisse trasferito in maniera perfettamente reversibile
- la variazione di entropia del gas e quella dell'ambiente nei due casi.

SOLUZIONI

2)

a)

$$d = \frac{n PM}{V} = \frac{0.5 \text{ moli} \cdot 28 \text{ g/mole}}{20 \ell} = 0.7 \text{ g/}\ell = 0.7 \text{ kg/m}^3$$

b)

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{0.5 \text{ moli} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/moli K} \cdot 300 \text{ K}}{20 \ell} = 0.615 \text{ atm}$$

c)

$$\frac{3}{2}kT = E_{tr} \quad E_{tr} = \frac{1}{2}mv_m^2 \quad m = \frac{PM}{N_A}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{tr}N_A}{PM}} = \sqrt{\frac{3RT}{PM}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \text{ J/mole K} \cdot 300 \text{ K}}{28 \text{ g/mole}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \text{ J/mole K} \cdot 300 \text{ K}}{28 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}}} = 520 \text{ m/s}$$

d)

Nel caso di una molecola biatomica oltre ai tr gradi di libertà di traslazione (corrispondenti all'energia cinetica traslazionale) si hanno altri due gradi di libertà:

$$E_{tot} = \frac{5}{2}kT$$

quindi

$$E_{tot} = \frac{5}{2}kT = 1.03 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

L'energia interna del gas è data dalla somma delle energia delle singole molecole:

$$U = \sum_i E_{tot} = N E_{tot}$$

Il numero totale di molecole si può' ricavare a partire dal numero di moli:

$$N = n N_A$$

quindi (ricordando la definizione di k)

$$U = N E_{tot} = n N_A \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2}nRT$$

numericamente:

$$U = \frac{5}{2}nRT = 3.1 \text{ kJ}$$

3)

Durante le due trasformazioni adiabatiche non c'è scambio di calore con l'esterno, il calore totale assorbito dall'esterno (pari al lavoro effettuato perchè siamo in un ciclo) sarà allora:

$$Q_{tot} = Q_{BC} + Q_{DA} = L_{tot}$$

Nella trasformazione isocora non c'è variazione di volume, quindi non c'è lavoro. Nella trasformazione isobara la pressione è costante, ed il lavoro fatto contro l'ambiente è semplicemente la pressione costante moltiplicata per la variazione di volume:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{CD} + p_A(V_A - V_D)$$

Durante la trasformazione BC , a volume costante, il calore assorbito è calcolabile a partire dal calore specifico a volume costante (che per un gas biatomico ideale vale $5R/2$):

$$Q_{BC} = nC_v(T_C - T_A)$$

Lo stesso vale per la trasformazione a pressione costante se si sostituisce C_v con C_p che sempre per un gas biatomico ideale vale $7R/2$:

$$Q_{DA} = nC_p(T_A - T_D) \sim -2910J$$

Durante le trasformazioni adiabatiche rimane costante la quantità $TV^{\gamma-1}$ (dove γ vale $C_p/C_v = 7/5$), per cui possiamo scrivere le seguenti due equazioni:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \quad T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

Siccome $V_B = V_C$ le possiamo combinare dividendo membro a membro:

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A} \left(\frac{V_D}{V_A} \right)^{\gamma-1}$$

Siccome poi la pressione in A ed in D è la stessa, ricaviamo:

$$pV_A = nRT_A \quad pV_D = nRT_D \quad \rightarrow \quad \frac{V_D}{V_A} = \frac{T_D}{T_A}$$

per cui sostituendo nella relazione precedente:

$$\frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{T_D}{T_A} \right)^{\gamma}$$

da dove si può ricavare la temperatura incognita T_B :

$$T_B = T_C \left(\frac{T_A}{T_D} \right)^{\gamma} \sim 441.6K$$

quindi il calore scambiato in BC :

$$Q_{BC} = nC_v(T_C - T_B) \sim 5335J$$

Come sappiamo il calore assorbito totale, pari al lavoro fatto totale è la somma di questi due, per cui:

$$Q_{tot} = L_{tot} = Q_{BC} + Q_{DA} \sim 2425J$$

Il rendimento del ciclo infine si ottiene notando che il calore viene assorbito effettivamente dall'ambiente solo durante il ramo BC :

4)

Nel caso non ideale, la pressione che viene esercitata sul gas è in ogni istante quella esterna p_f . Siccome la temperatura è costante, il prodotto pV si conserva per cui:

$$p_0 V_0 = p_f V_f \quad \rightarrow \quad V_f = V_0 \frac{p_0}{p_f}$$

Il volume iniziale si può ricavare dalla legge di stato dei gas perfetti:

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} \sim 2.99 \cdot 10^{-3} m^3$$

Siccome la pressione esterna è costante ed il gas si espande (poichè $p_0 > p_f$) è il gas a fare lavoro contro l'ambiente in misura

$$L = p_f \Delta V = p_f V_0 \left(\frac{p_0}{p_f} - 1 \right) \sim 7180J$$

Dal momento che l'energia interna del gas perfetto dipende solo dalla sua temperatura (che non cambia) abbiamo $\Delta U = 0$, per cui il lavoro deve essere fatto assorbendo dall'ambiente l'equivalente quantità di calore. Per cui il calore ceduto all'ambiente è $Q = -L \sim -7180J$. Nel caso in cui la trasformazione avvenisse in modo totalmente reversibile potremmo sfruttare la relazione

$$L_{rev} = nRT_0 \log \frac{p_0}{p_f} \sim 24074J$$

La variazione di entropia nei due casi sarebbe la stessa per il gas, poichè gli stati iniziali e finali sono fissati e l'entropia è una funzione di stato. Ricorrendo al calore scambiato nel secondo caso, ricordandoci che T_0 è costante e che $Q = -L$ per un gas che non varia la sua energia interna otteniamo:

$$\Delta S_{gas} = \frac{-Q_{rev}}{T_0} = \frac{L_{rev}}{T_0} = nR \log \frac{p_0}{p_f} \sim 80.25J/K$$

Per quel che riguarda l'ambiente, nel caso reversibile la variazione di entropia è esattamente contraria (perchè l'entropia del sistema ambiente più gas non deve variare):

$$\Delta S_{env,rev} = -\Delta S_{gas} \sim -80.25J/K$$

Nel caso non reversibile possiamo calcolarla dal calore scambiato (che stavolta è assorbito dall'ambiente):

$$\Delta S_{env,irrev} = \frac{Q_{irrev}}{T_0} = \frac{-L}{T_0} \sim -23.93J$$

1)

Poiché il recipiente è molto largo il livello h_0 del liquido diminuisce molto lentamente per cui si può ritenere che la velocità di una particella di liquido nel punto 1 sia $v_1 = 0$ e la pressione p_1 sia uguale a quella atmosferica $p_1 = p_a$.

Indichiamo ancora con v_2 la velocità di una particella di liquido nel punto 2 e con $p_2 = p_a$ la sua pressione. Per l'equazione di Bernoulli si può scrivere:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_0 = p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_0 - h)}$$

Ora la portata dell'acqua sarà:

$$Q = S_2 \cdot v_2$$

e, per la stessa definizione di portata, il volume del secchio V sarà completamente riempito nel tempo:

$$Q = \frac{V}{t}$$

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{V}{S_2 \cdot v_2} = \frac{V}{S_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_0 - h)}} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (30 - 20)}} = 2,14 \text{ s}$$

Rubinetto chiuso:

Quando il rubinetto è chiuso la velocità dell'acqua è nulla $v_2 = 0$, pertanto utilizzando l'equazione di Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_0 = p_{\text{acqua}} + 0 + 0$$

$$p_{\text{acqua}} - p_a = \rho \cdot g \cdot h_0 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 30 = 2,94 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Rubinetto aperto:

Ricaviamo la velocità di uscita dell'acqua a rubinetto aperto sempre nel solito modo, ma questa volta $h = 0$:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_0 = p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_0 - h)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

Per conoscere la pressione dell'acqua all'interno del tubo occorre conoscere la velocità dell'acqua all'interno del tubo principale v_2^* , velocità che è diversa da quella di uscita appena calcolata v_2 , tuttavia ricorrendo all'equazione di continuità:

Utilizzando ancora una volta l'equazione di Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_a + 0 + \rho \cdot g \cdot h_o = p_{\text{acqua}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + 0$$

$$\begin{aligned} p_{\text{acqua}} - p_a &= \rho \cdot g \cdot h_o - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 = \rho \cdot g \cdot h_o - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{S_2}{S_1} \cdot v_2 \right)^2 = \rho \cdot g \cdot h_o - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{S_2}{S_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_o} \right)^2 = \\ &= \rho \cdot g \cdot h_o - \rho \cdot g \cdot h_o \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 = \rho \cdot g \cdot h_o \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] = 1000 \cdot 9,81 \cdot 30 \left[1 - \left(\frac{10 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-4}} \right)^2 \right] = \\ &= \mathbf{2,21 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \end{aligned}$$