Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2011/12
Fluidi e Termodinamica
Esame del 11/7/2012

1) In un recipiente di rame (densità ρ= 8.9 g/cm^3, conducibilità termica k=390 W/(m K)) è posto del ghiaccio a 0°C. Il fondo del recipiente, spesso d = 1 cm e avente superficie S = 100 cm^2, è posto in contatto con una sorgente termostatata a temperatura 20 °C per un minuto. Calcolare quanto ghiaccio si è sciolto (calore latente del ghiaccio $\lambda = 3.3\times10^5$ J/kg) assumendo che il trasferimento di calore avvenga solamente attraverso il fondo del recipiente. Calcolare inoltre la variazione di entropia del ghiaccio e della sorgente.

2) Un cilindro di altezza H = 1 m, chiuso ermeticamente, è riempito di acqua (approssimabile ad un fluido ideale) fino all'altezza h_0 = 90 cm. Il volume non occupato dall'acqua è riempito con un gas perfetto a pressione iniziale 8 atm e temperatura T=300 K. Si pratica alla base del cilindro un foro di area trascurabile rispetto alla superficie di base del cilindro. Ricavare l'espressione della velocità di uscita dell'acqua dal foro in funzione dell'altezza h del liquido, assumendo che il gas si espanda, via via che l'acqua fuoriesce, secondo una trasformazione isoterma reversibile.
Calcolare quindi
a) la velocità iniziale con cui l'acqua esce dal foro
b) la velocità quando l'altezza del liquido si è dimezzata rispetto al valore iniziale
c) per quale valore di h il flusso di acqua in uscita si arresta?

SOLUZIONI

2) Siano v_1 e p_1 la velocità e la pressione dell'acqua alla superficie del liquido e v_2 e p_2 all'altezza del foro. Considerando l'acqua un fluido ideale, vale l'equazione di Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

dove h indica il livello della superficie libera dell'acqua misurata a partire dal foro. Applicando l'equazione di continuità

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} << v_2$$

per cui possiamo trascurare $v_1(=0)$ e scrivere

$$p_1 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

p_2 è uguale alla pressione atmosferica

p_1 è la pressione del gas che si può scrivere in funzione dell'altezza h del fluido, considerando l'espansione isoterma di un gas perfetto

$$p_1 V_1 = p_1^i V_1^i$$

$$p_1 S_1 \left(H - h\right) = p_1^i S_1 \left(H - h_0\right)$$

$$p_1 = \frac{\left(H - h_0\right)}{\left(H - h\right)} p_1^i$$

dove i termini con apice i si riferiscono alla situazione iniziale (p_1^i = 8 atm). Sostituendo nella equazione di Bernoulli otteniamo

$$\frac{\left(H - h_0\right)}{\left(H - h\right)} p_1^i + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh + \frac{2}{\rho}\left[\frac{\left(H - h_0\right)}{\left(H - h\right)} p_1^i - p_2\right]}$$

a) Inizialmente, $h=h_0$. Dall'espressione di v_2 precedente si ricava

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_1^i - p_2\right) + 2gh_0} = \sqrt{\frac{2}{10^3}(8\times10^5 - 10^5) + 2\times9.8\times0.9} = 37.65 \text{ m/s}$$

b) Quando $h=h_0/2$ la velocità di uscita dal foro vale

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{h_0}{2} + \frac{2}{\rho}\left[\frac{\left(H - h_0\right)}{\left(H - \frac{h_0}{2}\right)} p_1^i - p_2\right]} = \sqrt{2\times9.8\times\frac{0.9}{2} + \frac{2}{10^3}\left(\frac{1-0.9}{1-0.45}8\times10^5 - 10^5\right)} = 9.986 \text{ m/s}$$

c) Il flusso si arresta quando l'argomento della radice =0

$$2gh+\frac{2}{\rho}\left[\frac{(H-h_0)}{(H-h)}p_1^i-p_2\right]=0$$

$$\rho gh(H-h)+(H-h_0)p_1^i-(H-h)p_2=0$$

$$\rho ghH-\rho gh^2+(H-h_0)p_1^i-Hp_2+hp_2=0$$

$$\rho gh^2-h(\rho gH+p_2)-(H-h_0)p_1^i+Hp_2=0$$

$$h=\frac{(\rho gH+p_2)\pm\sqrt{(\rho gH+p_2)^2+4\rho g(H-h_0)p_1^i-4\rho gHp_2}}{2\rho g}=$$

$$=\frac{(\rho gH+p_2)\pm\sqrt{(\rho gH-p_2)^2+4\rho g(H-h_0)p_1^i}}{2\rho g}=$$

$$=\frac{\left(1.0\times10^3\times9.8+10^5\right)\pm\sqrt{\left(1.0\times10^3\times9.8-10^5\right)^2+4\times10^3\times9.8(1.0-0.9)\times8\times10^3}}{2\times10^3\times9.8}$$

$$h_+=11.02\text{ m}$$

$$h_-=0.185\text{ m}$$

La soluzione h- è accettabile.

1) Il traferimento di calore attraverso il fondo del recipiente avviene per conduzione. La conduzione di calore Q attraverso il fondo del recipiente è descritta dalla legge di Fourier

$$\frac{Q}{t}=k\ S\frac{\Delta T}{d}=k\ S\frac{T_s-T_{gh}}{d}$$

dove t è il tempo e ΔT la differenza di temperature tra le due superfici del fondo, rispettivamente a contatto con la sorgente a temperatura T_s=25°C e il ghiaccio a T_{gh}=0°C. La quantità m di ghiaccio sciolta è data da

$$Q=m\lambda$$

Uguagliando le due espressioni si ricava

$$\frac{m\lambda}{t}=k\ S\frac{T_s-T_{gh}}{d}$$

$$m=\frac{t}{\lambda}k\ S\frac{T_s-T_{gh}}{d}=\frac{60\text{ s}}{3.3\times10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}}\times390\frac{\text{W}}{\text{m K}}\times10^{-2}\ \text{m}^2\times\frac{(20-0)\text{K}}{10^{-2}\ \text{m}}=1.42\text{ kg}$$