Università degli Studi di Siena
Corso di Laurea FTA - A.A. 2011/12
Fluidi e Termodinamica
Esame del 8/6/2012

Chi non ha superato la 1° prova in itinere svolga gli esercizi 1, 2, 3.
Chi deve fare solo il 2° compito in itinere: svolgere solo gli esercizi 3 e 4.

1) In una tubatura orizzontale di raggio pari a 0.3 cm e lunga 50 cm, scorre olio (densità 0.8 g/cm^3, viscosità 3×10^3 Pa s). Assumere numero di Reynolds uguale a 1000.
a) Quanto vale la portata massima del tubo, se si vuole che il moto sia laminare?
b) Quale differenza di pressione deve essere applicata agli estremi del tubo per mantenere tale portata?
c) Quanto lavoro deve compiere la pompa su ogni litro di olio che lo attraversa?
d) Quale potenza viene assorbita dalla pompa, se il suo rendimento è pari al 60%?

2) La temperatura di una massa di 1 grammo di ferro passa da 18°C a 20°C, alla pressione atmosferica. Calcolare la variazione di energia interna della massa di ferro. Il calore specifico del ferro vale c = 448 J/(kg K), il coefficiente di dilatazione termica (lineare) del ferro e pari a $\lambda = 1.1\times10^{-6}$ K^{-1} e la densità del ferro vale ρ= 7.8 g/cm^3.

3) Un cilindro a pareti adiabatiche e munito di pistone (anch'esso isolante e a tenuta stagna) è diviso in due parti uguali da un setto. Inizialmente il pistone è bloccato e la parte inferiore, di volume V_1 = 2 l, contiene 0.4 moli di gas perfetto monoatomico alla temperatura T = 27 °C, mentre nella parte superiore vi è il vuoto.
(a) Viene rimosso il setto ed il gas si espande liberamente. Determinare lo stato finale del gas (valori di pressione, volume e temperatura) e la variazione di entropia del gas.
(b) Successivamente viene sbloccato il pistone e il gas viene compresso in modo adiabatico reversibile fino a riportarlo al volume iniziale. Determinare la temperatura e la pressione del gas in questo stato e il lavoro subito dal gas.

4) Tre moli di un gas ideale monoatomico vengono portati dallo stato A allo stato B mediante una espansione adiabatica nel vuoto. Successivamente, il gas viene portato allo stato C tramite una compressione adiabatica irreversibile ed infine il gas viene posto a contatto con una sorgente a temperatura T_A e ritorna allo stato iniziale A con una trasformazione isobara irreversibile. Sono dati la temperatura T_A = 300K , la pressione p_A = 2×10^5 Pa ed il lavoro compiuto nella trasformazione BC, L_{BC} = − 3.7×10^4J. Determinare il volume dello stato C e calcolare la variazione di entropia del gas, della sorgente e dell'universo. Calcolare inoltre la variazione di entropia del gas separatamente per le tre trasformazioni AB, BC, CA.

SOLUZIONI

1) Definite d la densità, η la viscosità, R il numero di Reynolds, r il raggio del condotto si ha:
a)

$$\mathcal{R} = \frac{vdr}{\eta}$$

quindi

$$v_{crit} = 1000\frac{\eta}{dr}$$

Quindi

$$Q_{max} = v_{crit}S = 1000\frac{\eta}{dr}(\pi r^2) = 1000\frac{\pi\eta r}{d}$$

Numericamente

$$Q_{max} = 1000\frac{\pi\eta r}{d} = 1000\frac{\pi 3\cdot 10^{-3}Pa\,s\cdot 0.3\,cm}{0.8\cdot 10^3 kg/m^3} = 3.5\cdot 10^{-5}m^3/s = 35\,cm^3/s$$

b)

Per ottenere una portata pari a Q_{max} è necessario che la pompa mantenenga fra i due capi del tubo una differenza di pressione pari a:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4}Q_{max}$$

Numericamente

$$\begin{aligned}\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4}Q_{max} &= \frac{8\cdot 3\cdot 10^{-3}Pa\,s 50\,cm}{\pi(0.3\,cm)^4}35\,cm^3/s\\ &= \frac{8\cdot 3\cdot 10^{-3}Pa\,s 0.5\,m}{\pi(3\cdot 10^{-3}\,m)^4}35\,(10^{-2}\,m)^3/s\\ &= \frac{8\cdot 3\cdot 10^{-3}Pa\,s 0.5\,m}{\pi 3^4\cdot 10^{-12}\,m^4}35\,10^{-6}\,m^3/s = 1.65\cdot 10^3\,Pa\end{aligned}$$

c) Il lavoro compiuto dalla pompa (per mantenere un flusso stazionario) deve essere tale da compensare la perdita di energia del liquido dovuta alla viscosità

La legge di Poiseuille calcola la caduta di pressione ai capi del tubo proprio considerando la perdita di energia per unità di volume del liquido, causata dalla viscosità

$$\Delta P = \frac{L_{attrito}}{V}$$

quindi

$$L_{pompa} = \Delta P\cdot V$$

Numericamente

$$L_{pompa} = \Delta P\cdot V = 1.65\cdot 10^3 Pa\cdot 1\,\ell = 1.65\cdot 10^3 Pa\cdot 10^{-3}\,m^3 = 1.65\,J$$

d)

$$\epsilon = \frac{P_{utilizzata}}{P_{assorbita}}$$

la $P_{assorbita}$ sarà data da:

$$P_{assorbita} = \frac{P_{utilizzata}}{\epsilon}$$

La potenza utilizzata è data dal lavoro per unità di tempo utilizzato per far circolare il liquido

$$P_{utilizzata} = \frac{L_{pompa}}{\Delta t}$$

Poichè come abbiamo visto il lavoro compoito dalla pompa è dato da

$$L_{pompa} = \Delta P \cdot V$$

Questo vuol dire che

$$P_{utilizzata} = \Delta P \frac{V}{\Delta t} = \Delta P \cdot Q$$

Quindi la potenza assorbita sarà data da:

$$P_{assorbita} = \frac{P_{utilizzata}}{\epsilon} = \frac{\Delta P \cdot Q}{\epsilon}$$

Numericamente:

$$P_{assorbita} = \frac{\Delta P \cdot Q}{\epsilon} = \frac{1.65 \cdot 10^3 Pa \cdot 35\, cm^3/s}{\frac{60}{100}} = \frac{1.65 \cdot 10^3 Pa \cdot 35 \cdot 10^{-6}\, m^3/s}{\frac{60}{100}} = 9.6 \cdot 10^{-2}\, W$$

2)

Il primo principio $\Delta U = Q - W$, richiede il calcolo della quantita di calore e di lavoro. La quantita di calore vale

$$Q = cm\Delta T = 8,91.10^{-1} J$$

Per quanto riguarda il lavoro $W = p\Delta V$, bisogna calcolare la variazione di volume del corpo, utilizzando la legge della dilatazione termica per i volumi:

$$\Delta V = V 3\lambda \Delta T$$

Il volume risulta dalla definizione della densita $\rho = \frac{m}{V}$:

$$V = \frac{m}{\rho} = 0,13.10^{-6} m^3$$

Dunque la variazione di volume risulta essere:

$$\Delta V = V 3\lambda \Delta T = 7,1.10^{-12} m^3$$

ed il lavoro vale, con $p = p_{atm} = 1,013.10^5 Pa$,

$$W = p\Delta V = 7,2.10^{-7} J$$

Il lavoro e trascurabile rispetto al calore Q, quindi:

$$\Delta U = Q - W \sim Q = 8,91.10^{-1} J$$

3)

(a) In una espansione libera di un gas perfetto non c'è variazione di temperatura, per cui (denotando con B lo stato raggiunto dal sistema) $T_B = T = 300$ K;
inoltre: $V_B = 2\ V_1 = 4$ l;
la pressione si può ricavare dall'equazione di stato dei gas perfetti:
$P_B = n\ R\ T_B\ /\ V_B = 2.46$ atm

La trasformazione è adiabatica irreversibile (è una trasformazione spontanea), quindi la variazione di entropia deve essere positiva. La variazione di entropia si può determinare sia ricorrendo all'espressione valida per i gas perfetti,

$$\Delta S = n\ c_v \ln (T_B/T) + n\ R \ln(V_B\ /\ V_1) = n\ R \ln(V_B\ /\ V_1) = 2.3 \text{ J/K}$$

sia utilizzando una trasformazione reversibile alternativa che connette gli stessi stati, ad esempio si può considerare una isoterma reversibile:

$$\Delta S = Q_{AB}^{(rev)}\ /\ T = L_{AB}\ /\ T = [n\ R\ T \ln(V_B\ /\ V_1)\ ]/T = n\ R \ln(V_B\ /\ V_1) = 2.3 \text{ J/K}$$

(b) La trasformazione è adiabatica reversibile.

$P\ V^\gamma =$ costante; ossia $P_C\ V_C^\gamma = P_B\ V_B^\gamma$
ma $V_C = V_1$, quindi:

$$P_C = P_B\ (V_B\ /\ V_1)g = P_B\ (2)^{5/3} = 7.81 \text{ atm}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_C = P_C\ V_C\ /\ n\ R = 476 \text{ K}$$

Dal primo principio
$L = Q - \Delta U = -\Delta U = -n\ cv\ \Delta T = -n\ c_v\ (T_C - T_B) = -877$ J

4)
Questa trasformazione corrisponde ad una espansione adiabatica libera, dunque il lavoro e nullo (l'espansione nel vuoto non richiede lavoro) e il calore scambiato e nullo (la trasformazione e adiabatica). Quindi, dal primo principio, abbiamo:

$$\Delta U_{AB} = 0$$

quindi la trasformazione AB e anche isoterma, dato che per un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura: $T_A = T_B = 300K$.
- La trasformazione BC.
Dato che la compressione e adiabatica, $Q_{BC} = 0$, quindi il primo principio implica che:

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = nc_v(T_B - T_C) = nc_v(T_A - T_C)$$

Risolvendo questa relazione rispetto a T_C si otiene:

$$T_C = T_A - \frac{W_{BC}}{nc_v} = 1288,96K$$

Ora, il volume dello stato C puo essere ricavato dalla relazione $p_C V_C = nRT_C$, utilizzando il fatto che $p_A = p_C$:

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_A} = 0,16m^3$$

La trasformazione CA

Il gas cede una quantita di calore Q_{CA} che puo essere calcolata facilente perche la trasformazione e isobara:

$$Q_{CA} = nc_p(T_A - T_C) = -61666,60J$$

Questa informazione e utile per determinare la variazione di entropia dell'universo per il ciclo. Nel nostro caso, abbiamo

$$\Delta S_u = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb}$$

Le tre trasformazioni subite dal gas nel ciclo sono irreversibili, pero sommando i contributi risulta $\Delta S_{gas} = 0$, perche corrisponde alla variazione di entropia di un gas per il ciclo (l'entropia e una funzione di stato). Quindi rimane solo da determinare la variazione di entropia dell'ambiente. Essa viene data dal fatto che la sorgente termica assorbe del calore Q ceduto dal gas, quindi

$$Q = -Q_{CA} = +61666,60J$$

e la variazione di entropia dell'ambiente (e dell'universo) risulta essere:

$$\Delta S_u = \Delta S_{amb} = \frac{Q}{T_A} = \frac{61666,60J}{300K} = 205,56J/K$$