Corpo rigido

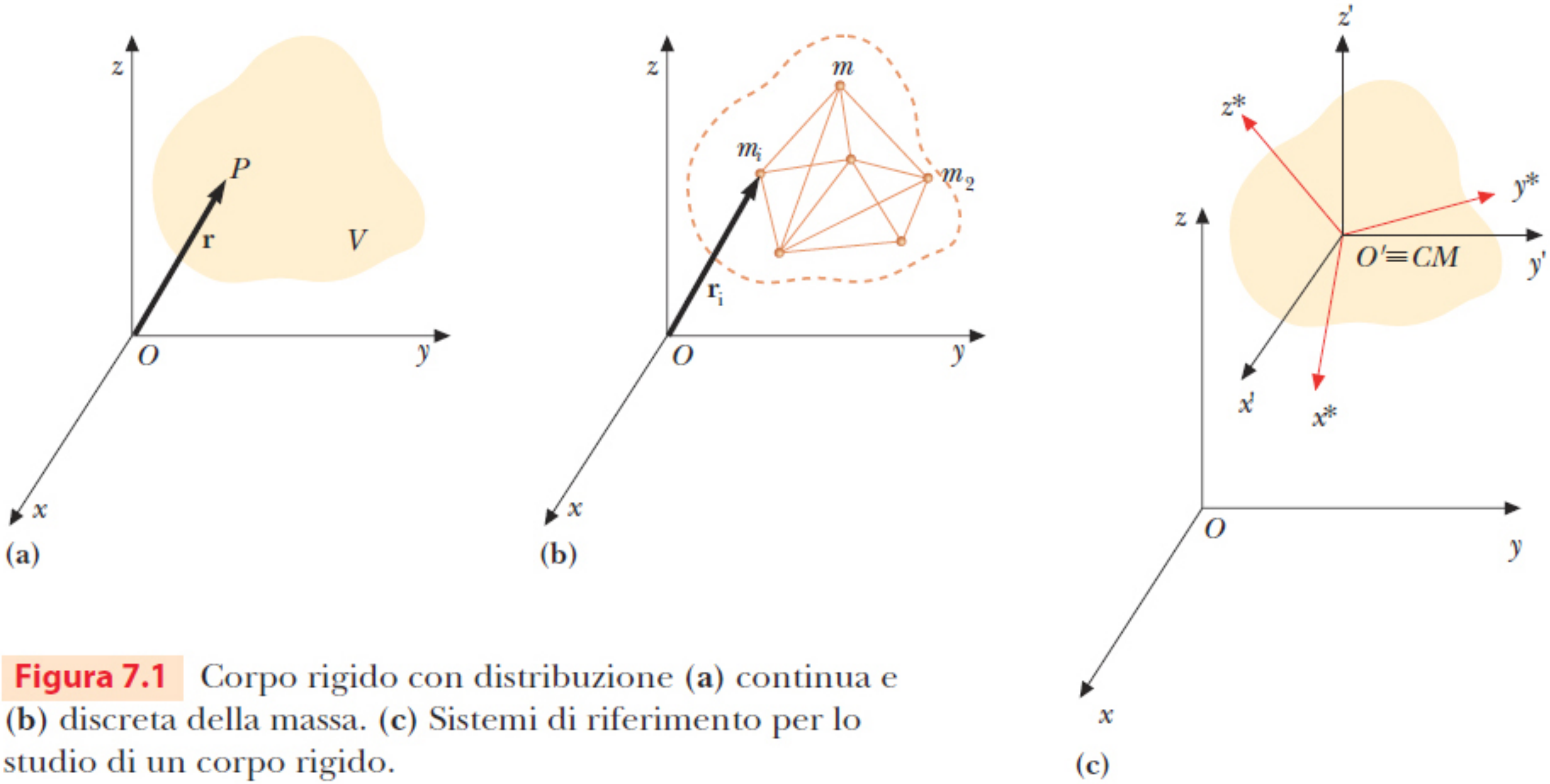
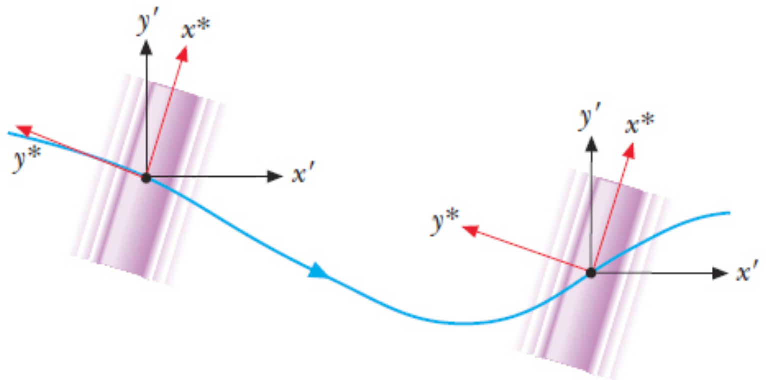


Figura 7.1 Corpo rigido con distribuzione (**a**) continua e (**b**) discreta della massa. (**c**) Sistemi di riferimento per lo studio di un corpo rigido.

- Corpo rigido: le distanze fra due punti qualsiasi del corpo restano invariate durante il moto.
- E' un tipo particolare di sistema dinamico di N particelle. Un sistema dinamico di N particelle indipendenti ha 3N gradi di libertà. Un corpo rigido ha 6 gradi di libertà: tre definiscono la posizione del CM, e tre la rotazione di un punto P del corpo rigido nel sistema del CM. Una volta nota la posizione di P, quella di tutti gli altri punti è nota perché le distanze da P sono fisse.
- Sistema di riferimento del CM: ha origine nel CM e assi (x'y'z') paralleli agli assi del sistema inerziale (xyz)

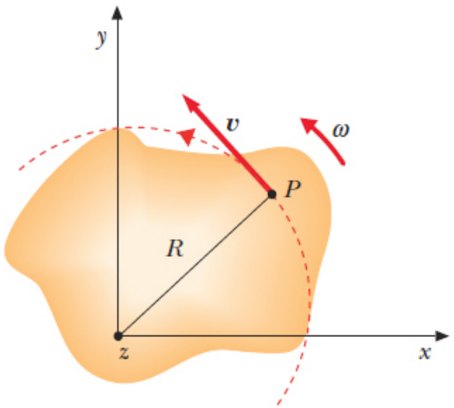
Moto di un corpo rigido



Moto di pura traslazione: tutti i punti hanno la stessa velocità del CM e traiettorie uguali a quella del CM.

$$\vec{P} = m\vec{v}_{cm}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(E)}$$



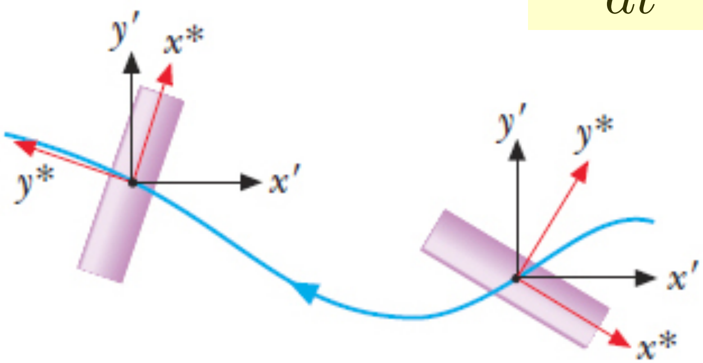
Moto di pura rotazione. Dato che la distanza fra ogni coppia di punti del corpo è fissa, il moto dei punti è circolare con velocità angolare ω.
Le traiettorie sono archi di circonferenza giacenti su piani paralleli con centro sull'asse di rotazione.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(E)}$$

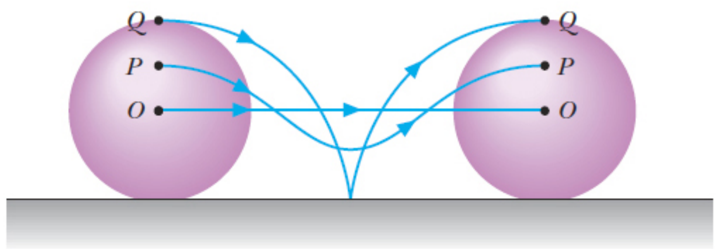
$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}^{(E)}$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

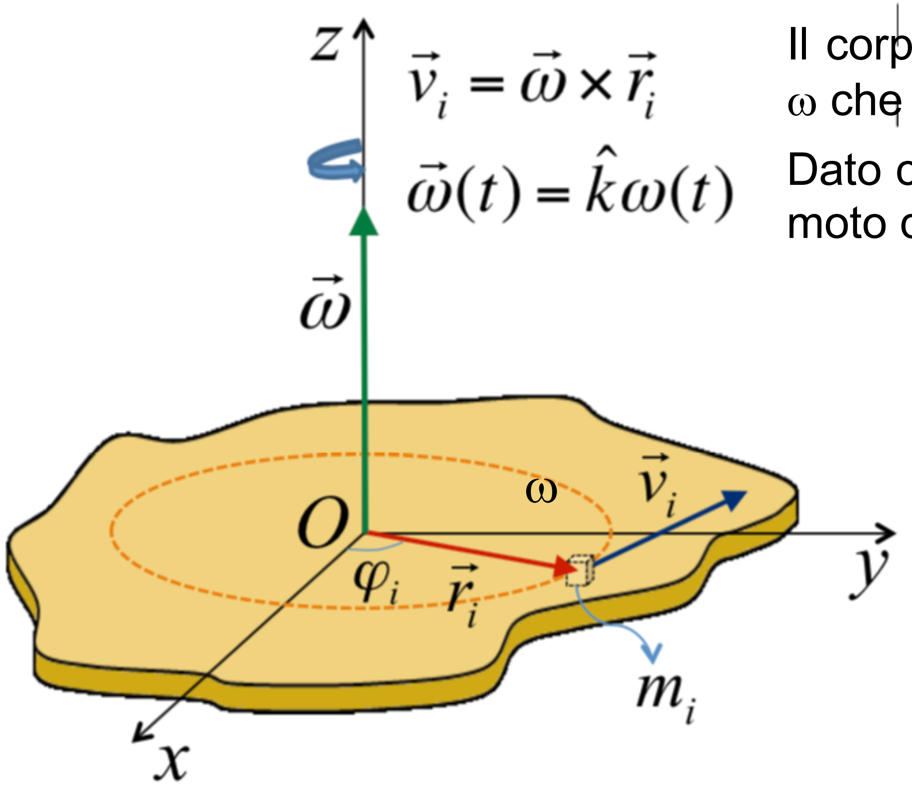
Momento rispetto a polo fisso nel sistema inerziale o rispetto al CM nel sistema del CM



Rototraslazione



Corpo rigido piatto che ruota intorno ad un asse fisso



Consideriamo un corpo rigido piatto, cioè che si estende nel piano xy ma ha dimensione trascurabile in z.

Il corpo ruota attorno ad un asse fisso z con velocità angolare ω che varia nel tempo.

Dato che la distanza fra ogni coppia di punti del corpo è fissa, il moto dei punti è circolare con velocità angolare ω

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \hat{k} \sum_i m_i r_i v_i =$$

$$= \hat{k} \sum_i m_i r_i^2 \omega = \vec{\omega} \sum_i m_i r_i^2$$

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

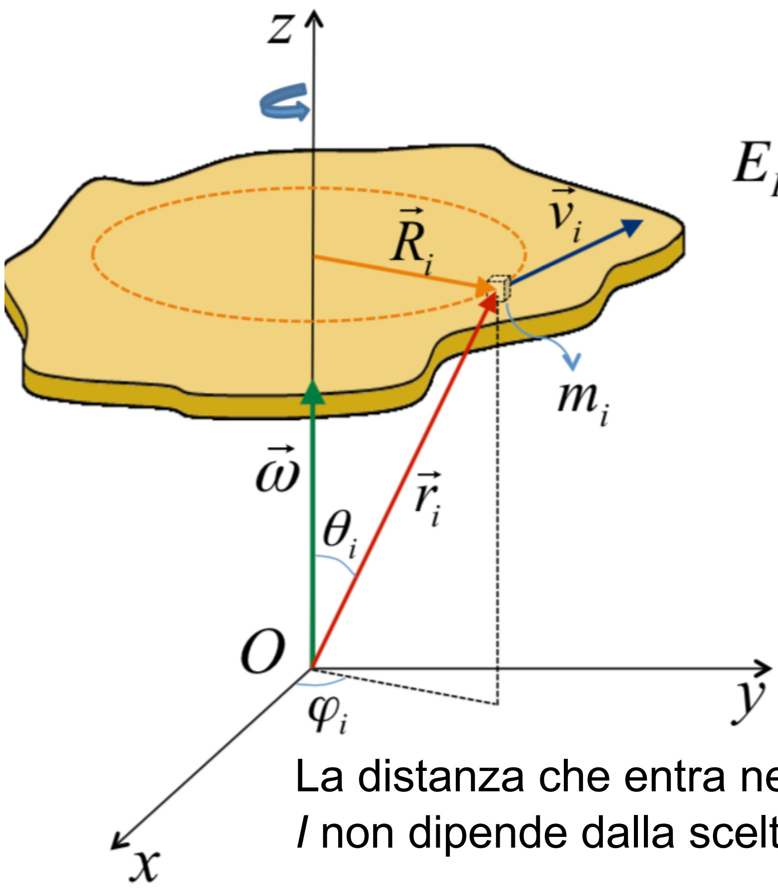
Momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione

Il momento di inerzia *I* dipende dalla forma del corpo, dalla distribuzione della massa e dall'asse di rotazione scelto. *I* non dipende dal polo scelto sull'asse di rotazione.

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Energia cinetica rotazionale



$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \,|\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \,\mathrm{sen}^2\theta_i$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i R_i^2 \right)}_{I} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

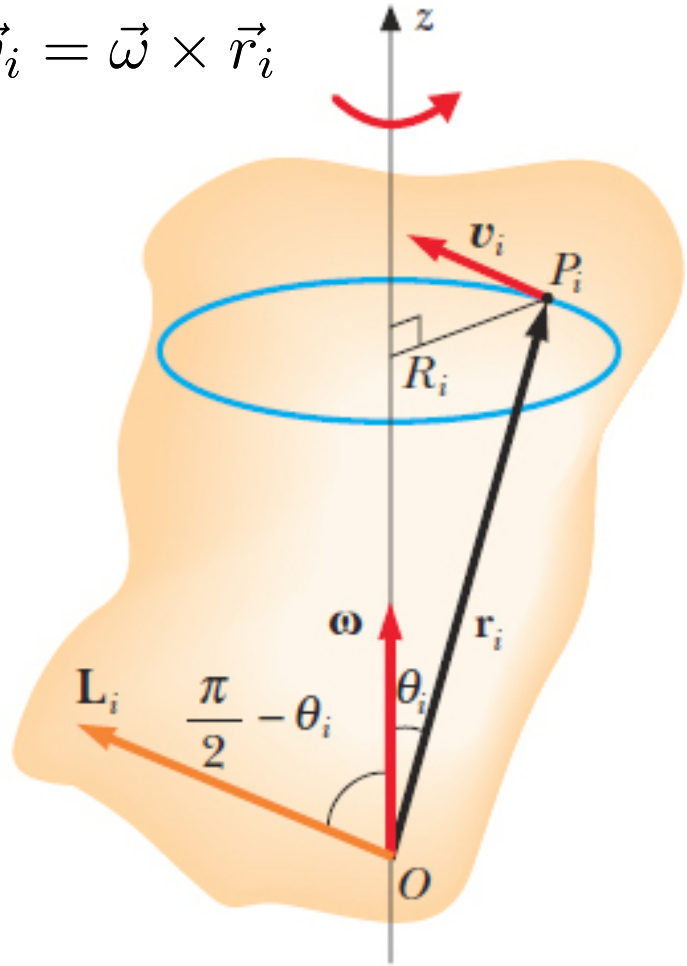
La distanza che entra nella definizione di *I* è sempre la distanza dall'asse.
I non dipende dalla scelta del polo sull'asse di rotazione.

Momento angolare di un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso

Calcoliamo il momento angolare per un corpo di forma qualsiasi. Al contrario che nel caso del corpo piatto i momenti **L**$_i$ dei vari punti non sono più orientati tutti lungo l'asse di rotazione z.

$$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

Utilizzando la formula $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$$= \vec{\omega}\sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i \vec{r}_i\, \omega r_i \cos\theta_i =$$

$$= \vec{\omega}\sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i \left(\vec{R}_i + r_i\cos\theta_i \hat{k}\right) \omega r_i \cos\theta_i =$$

$$= \vec{\omega}\sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i \vec{R}_i\, \omega r_i \cos\theta_i - \sum_i m_i \omega r_i^2 \cos^2\theta_i\, \hat{k} =$$

$$= \vec{\omega}\sum_i m_i r_i^2 \left(1 - \cos^2\theta_i\right) - \omega \sum_i m_i z_i \vec{R}_i =$$

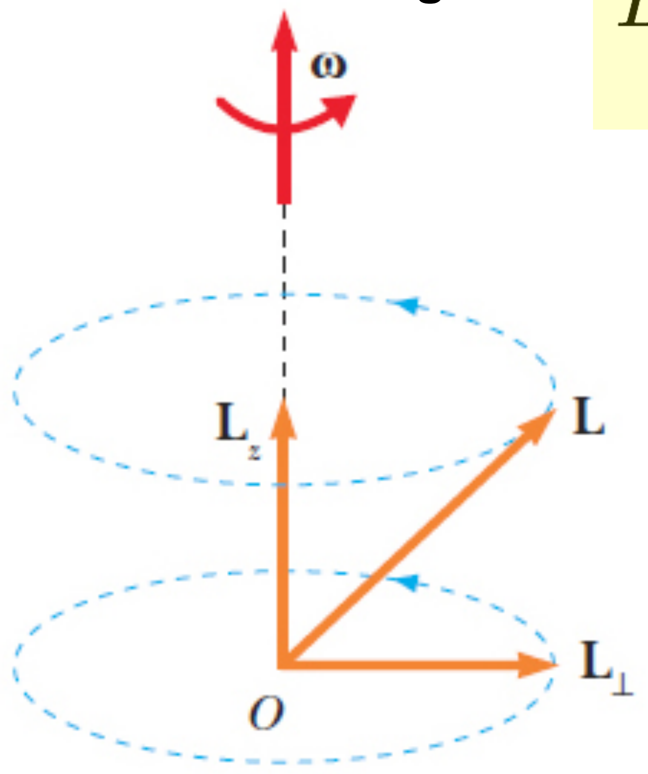
$$= \vec{\omega}\sum_i m_i r_i^2 \sin^2\theta_i - \omega \sum_i m_i z_i \vec{R}_i =$$

$$= \vec{\omega}\sum_i m_i R_i^2 - \omega \sum_i m_i z_i \vec{R}_i$$

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

Moto di precessione del momento angolare

$$\vec{L} = \vec{\omega} I - \omega \sum_i m_i z_i \vec{R}_i$$



<u>Momento angolare assiale</u> $\mathbf{L_z}$
Non varia di direzione e non dipende dal polo.
Può variare in modulo e verso.

$\mathbf{L}_\perp$ <u>momento ortogonale all'asse di rotazione</u>.
Varia in direzione, e dipende dalla scelta del polo.
Può variare in modulo.

Il momento angolare non è in generale parallelo al vettore velocità angolare

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ solo se la componente ortogonale del momento $\sum m_i z_i \vec{R}_i = 0$ (es: caso del corpo piatto, pag.3)

Quando ciò si verifica l'asse di rotazione è un asse principale di inerzia del corpo.

<u>Teorema di Poinsot</u>: ogni corpo rigido ha almeno tre assi principali di inerzia passanti per un suo punto e ortogonali fra loro. Se il corpo ruota rispetto ad uno di essi L è parallelo a ω, ovvero all'asse di rotazione.

Se il corpo rigido è omogeneo i suoi assi di simmetria sono assi principali di inerzia, che in tal caso possono essere più di tre (ad es: una sfera ha infiniti assi principali di inerzia)

Equazione del moto di un corpo rigido ruotante attorno ad un asse fisso

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$

Si scompone la seconda equazione cardinale in un'equazione per il momento assiale e una per la componente ortogonale del momento

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(E)}$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_z^{(E)}$$

$$\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_\perp^{(E)}$$

Dall'equazione del momento assiale per integrazione si può ricavare la velocità angolare e la legge oraria dell'angolo di rotazione

$$\omega(t) - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{M_z^{(E)}}{I} dt' = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt'$$

Accelerazione angolare

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt'$$

$$M_z^{(E)} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0$$
$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

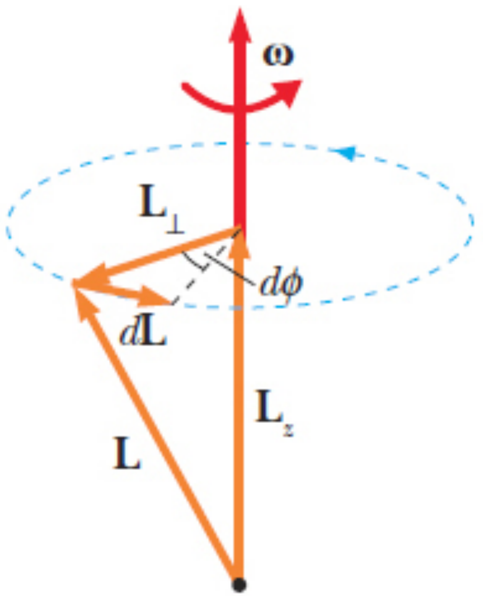
$$M_z^{(E)} = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Casi particolari

1) l'asse di rotazione è un asse principale di inerzia del corpo rigido: **L** è parallelo al vettore velocità angolare e le equazioni del momento angolare si semplificano in

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}^{(E)} \qquad \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = 0$$

2) l'asse di rotazione non è un asse principale di inerzia del corpo rigido, ma la rotazione è uniforme (ω costante): L_z è costante e $\mathbf{L}_\perp$ varia in direzione ma non in modulo.



$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = M_z^{(E)}$$

$$\omega = \text{cost} \quad \rightarrow \quad I\dot{\omega} = 0 = M_z^{(E)}$$

$$L_z = I\omega = \text{cost}$$

$$dL = L_\perp\,\omega\,dt$$

$$\frac{dL}{dt} = L_\perp\,\omega = M_\perp^{(E)}$$

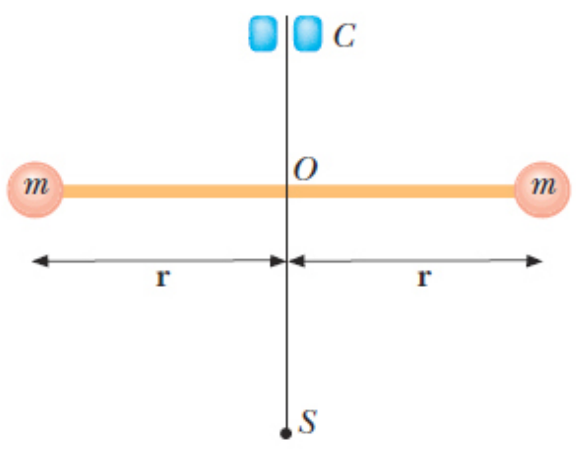
$\mathbf{M}_\perp \parallel d\mathbf{L}$

$d\mathbf{L} \perp \mathbf{L}$

Per mantenere un corpo in rotazione uniforme attorno ad un asse che non è asse principale di inerzia serve un momento delle forze esterne **M**, che è perpendicolare a **L**

Se invece l'asse è principale di inerzia, la rotazione uniforme non necessita di un momento delle forze esterne.

Esempio



Nota: La barra che unisce le masse *m* ha massa trascurabile

Corpo rigido in moto rotatorio uniforme attorno ad un asse principale di inerzia

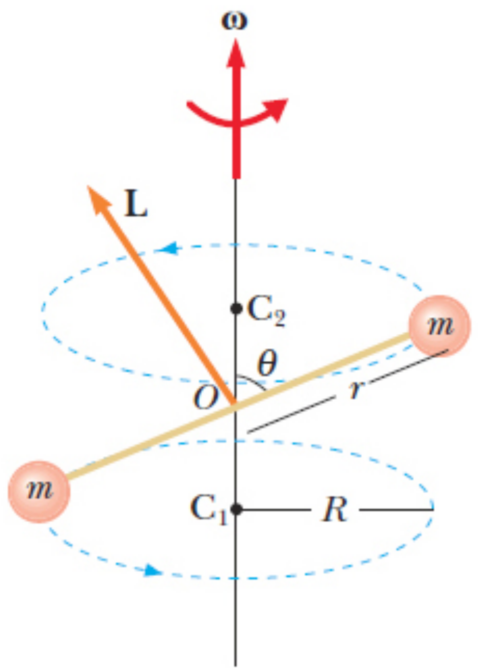
$$I = 2mr^2$$

$$L_z = I\omega$$

$$\vec{L}_\perp = -\omega \sum_i m_i z_i \vec{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad I\dot{\omega} = M_z^{(E)} \qquad M_\perp = 0$$

$$\omega = \mathrm{cost} \quad \rightarrow \quad M_z^{(E)} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{M}^{(E)} = 0$$



Corpo rigido in moto rotatorio uniforme attorno ad un asse non principale di inerzia

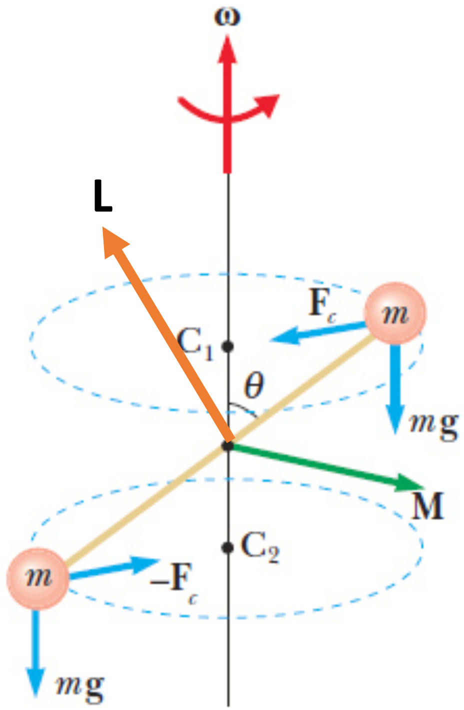
$$I = 2mR^2 = 2mr^2 \sin^2\theta$$

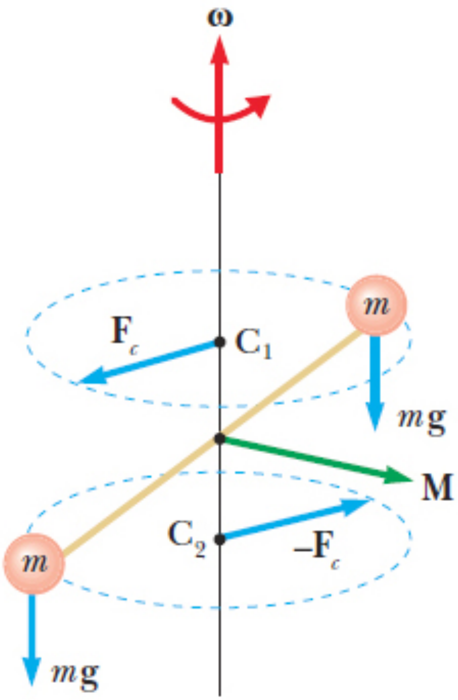
$$L_z = I\omega$$

$$\vec{L}_\perp = -\omega \sum_i m_i z_i \vec{r}_i = -2\omega\, m\, r \cos\theta \vec{R}$$

$$I\dot{\omega} = M_z^{(E)}$$

$$M_\perp = L_\perp \omega = -2\omega^2\, m\, r R \cos\theta$$





$$\omega = \text{cost} \;\rightarrow\; M_z^{(E)} = 0 \;\rightarrow\; M^{(E)} = -2\omega^2\, m\, r\, R \cos\theta = \text{cost}$$

$$\vec{M}^{(E)} \perp \vec{L}$$

$$\vec{M}^{(E)} \perp \vec{\omega}$$

Nel moto rotatorio uniforme attorno ad un asse <u>non principale di inerzia</u>:

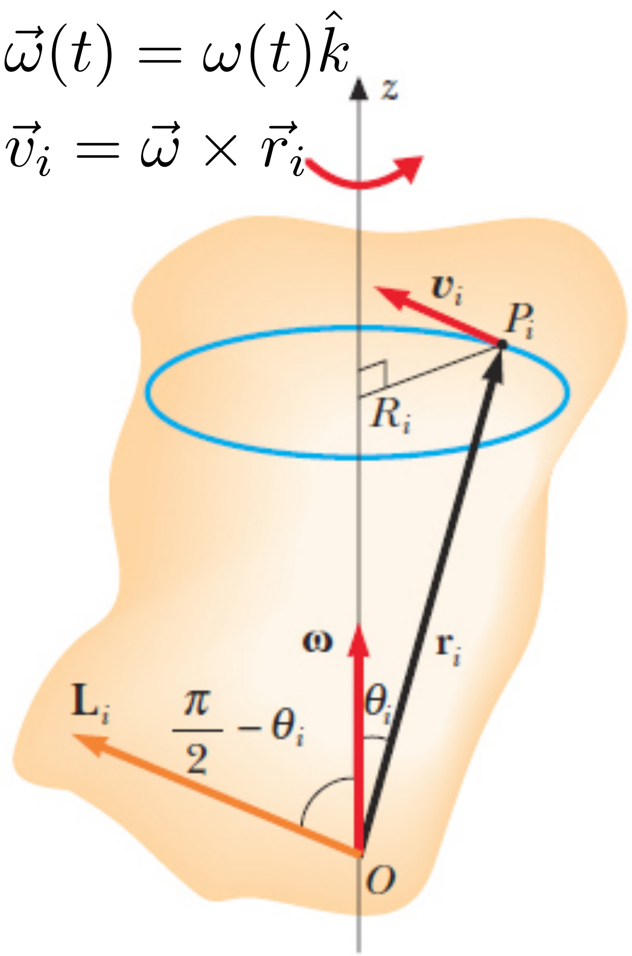
- **L** è costante in modulo e ruota intorno all’asse (precessione uniforme)
- **M** è costante in modulo e ruota intorno all’asse di rotazione mantenendosi perpendicolare sia a **L** che all’asse di rotazione. Il momento **M** è prodotto da forze esterne applicate all’asse (figura in basso) per mantenere in rotazione il corpo. Queste forze si trasmettono tramite la barra alle masse determinando le forze centripete che ne determinano il moto circolare (figura in alto).
- La forza peso delle due masse ha momento nullo*.

*Notiamo che la forza peso **P** di un corpo rigido si applica nel CM, che si può pensare come il punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema.
Il momento della forza peso è quindi **M** = $\mathbf{r}_{cm}$ x **P** dove $\mathbf{r}_{cm}$ è la distanza del CM dal polo. Se il polo coincide con il CM o l’asse di rotazione passa per il CM (come nell’esempio in questione), allora **M**=0.

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso

$$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \sin^2\theta_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

$\mathcal{L} = E_{kf} - E_{ki}$ Teorema dell'energia cinetica

$$d\mathcal{L} = dE_k = I\omega\, d\omega = I\frac{d\theta}{dt}\alpha\, dt = I\alpha\, d\theta = M_z^{(E)} d\theta$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z^{(E)} d\theta'}$$