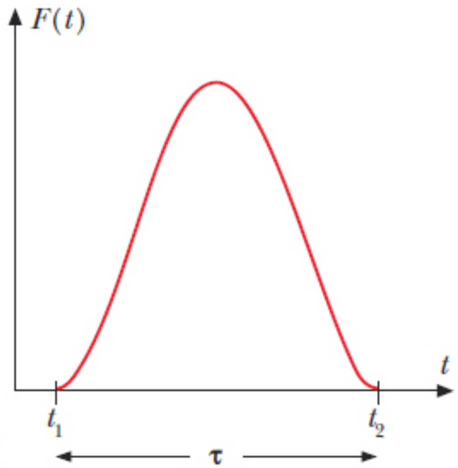
Urti fra due punti materiali

- Urto: interazione fra due punti materiali.
- L'interazione può essere **di contatto** (es: due oggetti che si scontrano) o **a distanza** (es: forza elettrica fra due cariche elettriche, forza nucleare fra due particelle elementari)
- Forze di contatto: forze interne molto intense che agiscono per un tempo τ (tempo dell'urto) molto breve → **Forze impulsive** che deformano gli oggetti durante l'urto.
- L'urto è istantaneo ($\tau \rightarrow 0$) : lo spostamento degli oggetti durante l'urto è trascurabile.
- Poiché le forze impulsive sono interne, se non ci sono forze esterne, nell'urto si conserva la quantità di moto



$$\vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{21}\, dt = \vec{I}_1$$

$$\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i} = m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_{2i} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{12}\, dt = -\int_t^{t+\tau} \vec{F}_{2,1}\, dt = -\vec{I}_1$$

$$\vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = -\left(\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i}\right)$$

$$\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{p}_{2i} + \vec{p}_{1i}$$

Conservazione della quantità di moto

Se ci sono forze esterne e NON sono impulsive, il loro impulso nel tempo dell'urto è trascurabile rispetto a quello delle forze interne e la quantità di moto si conserva comunque

$$\vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = \int_t^{t+\tau} \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_1^E\right) dt = \vec{I}_1 + < \vec{F}_1^E > \tau$$

$$\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i} = \int_t^{t+\tau} \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_2^E\right) dt = -\vec{I}_1 + < \vec{F}_2^E > \tau$$

$$\vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} - < \vec{F}_1^E > \tau = -\left(\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i} - < \vec{F}_2^E > \tau\right)$$

$$(\vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i}) + (\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i}) = (< \vec{F}_2^E > + < \vec{F}_1^E >)\tau = < \vec{F}^E > \tau \simeq 0$$

Se $\tau \to 0$ e $\mathbf{F}^E \ll \mathbf{F}_{12}$

→ $\boxed{\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{p}_{2i} + \vec{p}_{1i}}$

Conservazione della quantità di moto nell'urto anche se ci sono forze esterne NON impulsive

Per quanto riguarda l'energia, la variazione dell'energia cinetica prima e dopo l'urto è uguale al lavoro delle forze interne. Il lavoro delle forze esterne è nullo perché lo spostamento degli oggetti durante l'urto è trascurabile.

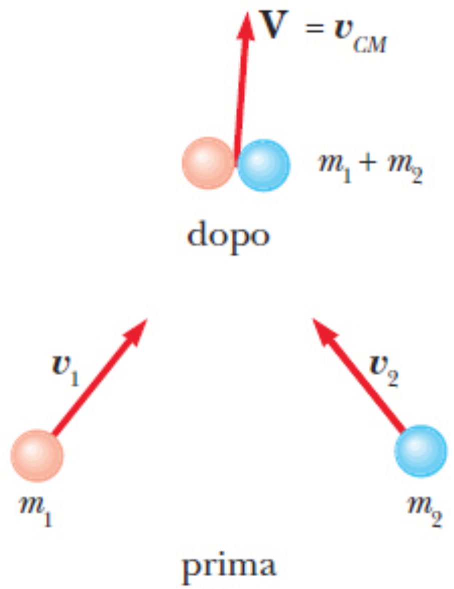
$$E_{kf} - E_{ki} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_E \simeq \mathcal{L}_I$$

In generale le forze interne impulsive non sono conservative (deformazioni, sviluppo di calore) e quindi l'energia cinetica non si conserva.

Se sono conservative → L_I=0 (lo spostamento è trascurabile), e si conserva l'energia cinetica (urto elastico).

Urto completamente anelastico

I punti restano attaccati dopo l'urto e formano un unico oggetto di massa pari alla somma delle masse dei punti materiali.



$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

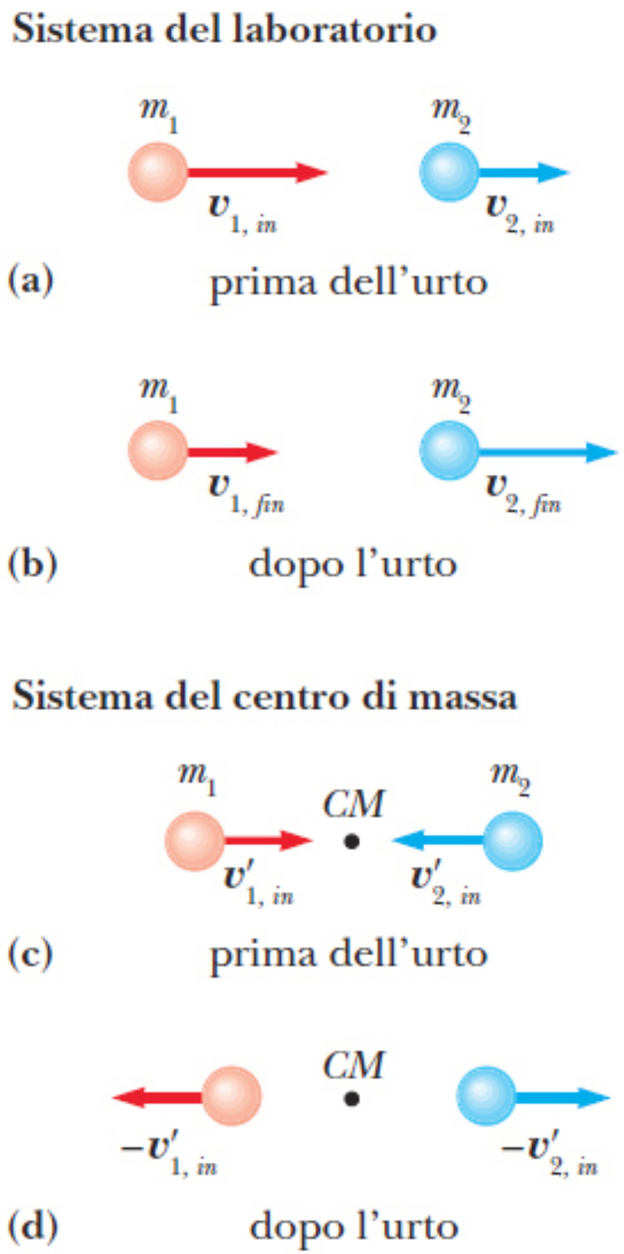
Teorema di Koenig

$$E_{ki} = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^{\prime 2} + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^{\prime 2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 + E'_{ki}$$

$$E_{kf} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 < E_{ki}$$

L'energia cinetica non si conserva nell'urto.
Una parte dell'energia cinetica iniziale (E_{ki}') è spesa come lavoro per deformare i due corpi e fare sì che restino attaccati. Le forze di deformazione non sono conservative.

Urto elastico nel caso unimensionale



Si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica. Le deformazioni che avvengono nell'urto sono elastiche, e gli oggetti al termine dell'urto riprendono la loro forma iniziale.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Il problema consiste nel determinare le velocità finali note le velocità iniziali. Si può risolvere più facilmente studiando l'urto nel sistema di riferimento solidale al centro di massa (sistema a quantità di moto nulla). Le equazioni di conservazione nel sistema del CM diventano

$$m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = 0 = m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2i} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$$

(remind: le velocità con l'apice indicano le velocità relativa al sistema del CM).

Dalle equazioni di conservazione della quantità di moto nel sistema di riferimento del CM si ricava

$$m_1 v'_{1f} = -m_2 v'_{2f}$$
$$m_1 v'_{1i} = -m_2 v'_{2i}$$

che sostituite nell'equazione di conservazione dell'energia cinetica danno

$$\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 v'^2_{2i} + m_2 v'^2_{2i} = \frac{m_2^2}{m_1} v'^2_{2f} + m_2 v'^2_{2f} \quad \rightarrow \quad v'_{2f} = -v'_{2i}$$

Analogamente per il punto materiale 1 $\quad v'_{1f} = -v'_{1i}$

Nel sistema del CM le velocità di ciascun punto restano uguali in modulo dopo l'urto e cambiano verso.

Ricaviamo ora le velocità relative iniziali, con le leggi di trasformazione delle velocità

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

La velocità del CM è costante perché la quantità di moto si conserva.
(nota: si può calcolare nello stato iniziale, e il suo valore è uguale nello stato finale!)

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = v_{2i} - \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (v_{2i} - v_{1i})}{m_1 + m_2}$$

Trovate le velocità relative dello stato iniziale, si cambiano di segno per ottenere quelle relative dello stato finale, e si applica dinuovo la trasformazione delle velocità fra i sistemi di riferimento per ricavare le velocità finali nel sistema del laboratorio

$$v_{1f} = v_{cm} + v'_{1f} = v_{cm} - v'_{1i} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} - \frac{m_2(v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2f} = v_{cm} + v'_{2f} = v_{cm} - v'_{2i} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} - \frac{m_1(v_{2i} - v_{1i})}{m_1 + m_2} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

<u>Casi particolari</u>

$$m_1 >> m_2 \qquad v_{1f} = v_{1i} + 2\frac{m_2}{m_1}v_{2i} \qquad v_{2f} = -v_{2i} + 2v_{1i}$$

$$m_1 << m_2 \qquad v_{2f} = v_{2i} + 2\frac{m_1}{m_2}v_{1i} \qquad v_{1f} = -v_{1i} + 2v_{2i}$$

$$m_1 = m_2 \qquad v_{2f} = v_{1i} \qquad v_{1f} = v_{2i}$$

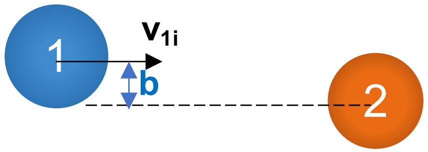
Se il punto 2 inizialmente è fermo ($v_{2i} = 0$)

$$m_1 >> m_2 \qquad v_{1f} = v_{1i} \qquad v_{2f} = 2v_{1i}$$

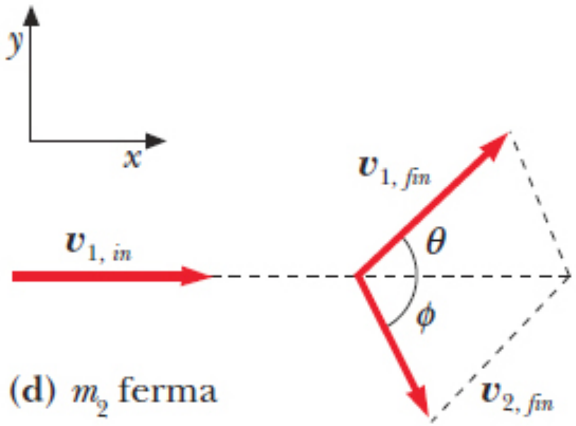
$$m_1 << m_2 \qquad v_{1f} = -v_{1i} \qquad v_{2f} = 2\frac{m_1}{m_2}v_{1i} \to 0$$

$$m_1 = m_2 \qquad v_{2f} = v_{1i} \qquad v_{1f} = 0$$

Urti non centrali



Il parametro di impatto b è la distanza fra la direzione della velocità del punto materiale 1 e il centro del punto materiale 2
L'urto è centrale se b=0, non centrale se b≠0



Conservazione della quantità di moto nelle componenti x e y

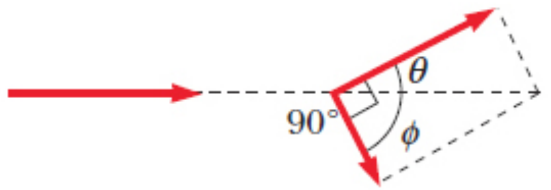
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

$$m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi = 0$$

Se l'urto è elastico si ha anche conservazione dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Esercizio Considerare un urto non centrale elastico fra due punti materiali di uguale massa. Dimostrare che la somma degli angoli di diffusione è 90°



$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi$$
$$m_1 v_{1f}\sin\theta - m_2 v_{2f}\sin\phi = 0$$
$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Sommiamo le equazioni di conservazione della quantità di moto dopo averle elevate al quadrato

$$m_1^2 v_{1i}^2 = \left(m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi\right)^2 + \left(m_1 v_{1f}\sin\theta - m_2 v_{2f}\sin\phi\right)^2$$
$$m_1^2 v_{1i}^2 = m_1^2 v_{1f}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + m_2^2 v_{2f}^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + 2m_1 m_2 v_{1f} v_{2f}\left(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\right)$$
$$m_1^2 v_{1i}^2 = m_1^2 v_{1f}^2 + m_2^2 v_{2f}^2 + 2m_1 m_2 v_{1f} v_{2f}\cos\left(\theta+\phi\right)$$

Se le masse sono uguali

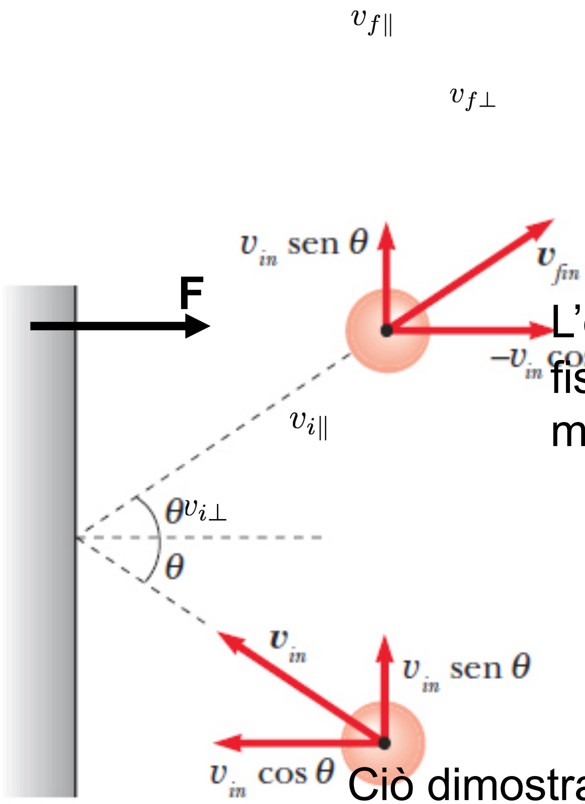
$$m_1 = m_2 = m$$
$$\frac{1}{2}m v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m v_{2f}^2 + m v_{1f} v_{2f}\cos\left(\theta+\phi\right)$$

e' uguale all'equazione di conservazione dell'energia cinetica solo se il termine con il coseno è nullo

$$\cos\left(\theta+\phi\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \theta+\phi = 90^\circ$$

Urto obliquo di un punto materiale su una parete

Se non c'è attrito con la parete durante l'urto, la forza impulsiva **F** è normale alla parete. Pertanto si ha una variazione di quantità di moto del punto materiale solo nella componente normale alla parete. La componente della quantità di moto parallela alla parete rimane invariata.



$$v_{i||} = v_{f||}$$

$$mv_{f\perp} - mv_{i\perp} = \int_t^{t+\tau} F dt$$

L'energia cinetica nell'urto elastico si conserva. Poiché la parete è fissa e non acquista energia cinetica, l'energia cinetica del punto materiale dopo l'urto è uguale a quella prima dell'urto.

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \rightarrow \quad v_{i||}^2 + v_{i\perp}^2 = v_{f||}^2 + v_{f\perp}^2$$

$$v_{i\perp}^2 = v_{f\perp}^2 \quad \rightarrow \quad v_{f\perp} = -v_{i\perp}$$

Ciò dimostra che l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza θ