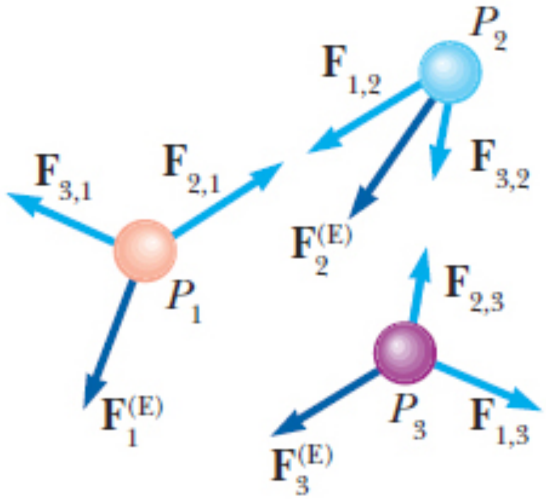
Quantità di moto di un sistema di punti materiali

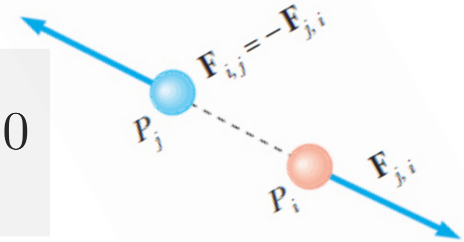
Sia dato un sistema di N punti materiali di massa m_i
Ogni punto materiale è soggetto a forze esterne ed interne



$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(I)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(I)} = 0$$



La risultante delle forze interne è nulla, perché le forze interne sono a due a due uguali e opposte per il principio di azione e reazione.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \vec{F}^{(E)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}^{(E)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\right) = \vec{F}^{(E)}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(E)}}$$

1° Equazione cardinale

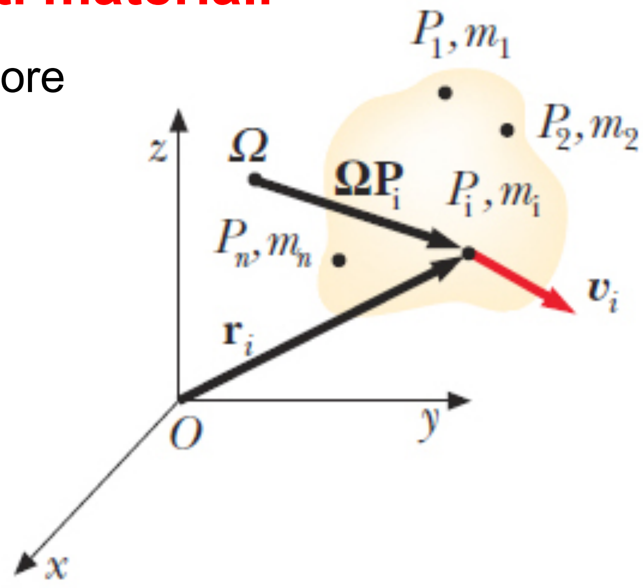
Se $\vec{F}^{(E)} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{P} = \text{cost}$

Conservazione della quantità di moto del sistema

Se è nulla la risultante delle forze esterne (o anche solo una sua componente secondo una certa direzione) si conserva la quantità di moto del sistema (o la sua componente secondo quella direzione).

Centro di massa di un sistema di punti materiali

Definiamo il centro di massa come il punto individuato dal raggio vettore



$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

che si muove con velocità (derivando la formula precendente)

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \longrightarrow \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m\,\vec{v}_{cm}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = m$$

La quantità di moto del sistema coincide con la quantità di moto del CM.
Il CM è un punto con massa pari alla massa totale del sistema e soggetto ad una forza pari alla risultante delle forze esterne

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(E)}$$

$$m\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = m\vec{a}_{cm} = \vec{F}^{(E)}$$

$$\vec{F}^{(E)} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{P} = \text{cost} \rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \text{cost}$$

Se il sistema è isolato (cioè la risultante delle forze esterne è nulla) il CM si muove di moto rettilineo uniforme

Sistema di due punti materiali

Equazioni del moto di due particelle non soggette a forze esterne. Le forze interne sono uguali e opposte e dirette lungo la retta congiungente le due particelle.

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Sommando le due equazioni si ottiene l'equazione del moto del CM $\quad \vec{r}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (m_1+m_2)\,\vec{a}_{cm} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \mathrm{cost}$$

Il CM si muove di moto rettilineo uniforme (non ci sono forze esterne).

Sottraendo dall'equazione del punto 1 quella del punto 2, si ricava l'equazione del moto per la coordinate relativa

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{21} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{21}$$

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ Massa ridotta

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ Coordinata relativa

$$\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}$$

Il CM descrive il moto globale del sistema

La dinamica del sistema è descritta da particella di massa ridotta e coordinata relativa.

Le coordinate dei due punti materiali nel sistema di riferimento solidale al CM sono

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{cm} = \frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm} = -\frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Risolvendo l'equazione del moto della coordinata relativa, si possono ricavare le equazioni del moto per le coordinate dei punti nel riferimento del CM, e da queste le equazioni del moto nel sistema di riferimento O

$$\vec{r}_1 = \vec{r}'_1 + \vec{r}_{cm}$$

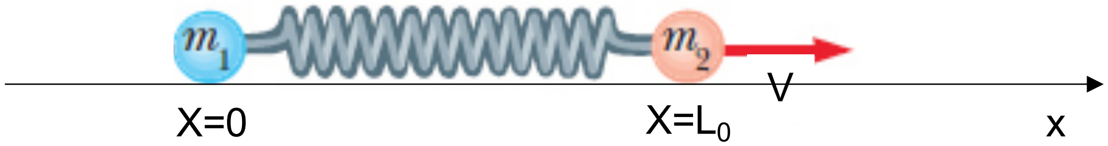
$$\vec{r}_2 = \vec{r}'_2 + \vec{r}_{cm}$$

Si noti che dalle equazioni precedenti segue che la quantità di moto totale nel riferimento del CM è nulla

$$m_1\dot{\vec{r}}'_1 + m_2\dot{\vec{r}}'_2 = 0$$

Esercizio

Due punti materiali di masse m_1 e m_2 sono collegate da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo L_0. Il sistema si può muovere su un asse orizzontale x. Scrivere la legge oraria dei due punti, conoscendo le condizioni inziali: $x_1(0) = 0$ $v_1(0) = 0$ $x_2(0) = L_0$ $v_2(0) = V$



Lungo asse x ci sono solo forze interne → Moto rettilineo uniforme del CM con velocità

$V_G = m_2 V/(m_1+m_2)$ → legge del moto del CM $X_G = m_2/(m_1+m_2)\, V\, t + c$

$c = X_G(0) = m_2 L_0/(m_1+m_2)$ → $X_G = m_2/(m_1+m_2)\,(V t + L_0)$

Equazione del moto della coordinata relativa $x = x_2 - x_1$ $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$

$\mu\, d^2x/dt^2 = -k\,(x - L_0)$

che ha come soluzione $x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + L_0$ $\omega^2 = k/m$

$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$

Si trovano A e ϕ dalle condizioni iniziali

$x(0) = x_2(0) - x_1(0) = L_0$ → $A \sin\phi + L_0 = L_0$ → $\phi = 0$

$v(0) = v_2(0) - v_1(0) = V$ → $A\,\omega \cos(0) = V$ → $A = V/\omega$ → $x(t) = V/\omega \sin(\omega t) + L_0$

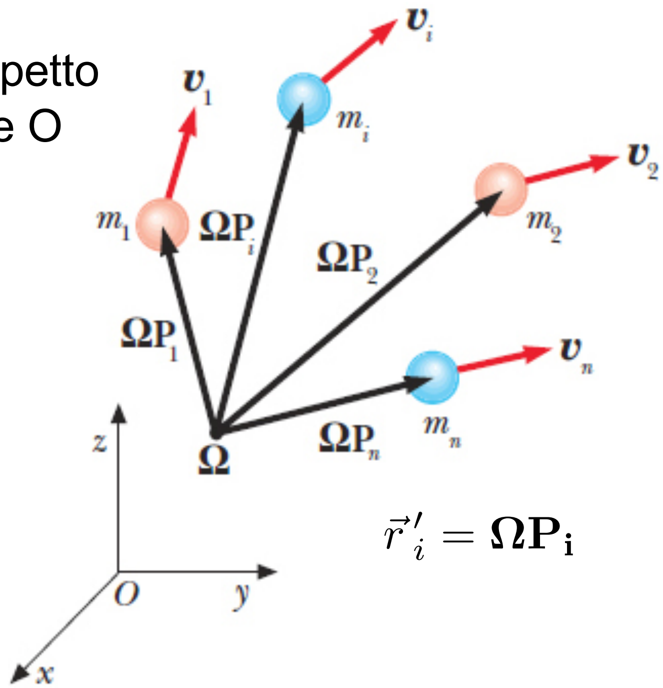
Combinando l'equazione del moto della coordinata relativa x e del CM X_G si scrivono le equazioni dei due punti

$x_1(t) = x_G - m_2\, r/(m_1+m_2) = m_2/(m_1+m_2)\,[V t + L_0] - m_2/(m_1+m_2)\,[V/\omega \sin(\omega t) + L_0]$

$x_2(t) = x_G + m_1\, r/(m_1+m_2) = m_2/(m_1+m_2)\,[V t + L_0] + m_1/(m_1+m_2)\,[V/\omega \sin(\omega t) + L_0]$

Momento angolare di un sistema di punti materiali

Calcoliamo il momento angolare del sistema di N punti materiali rispetto ad un polo Ω in moto nel sistema di riferimento <u>inerziale</u> con origine O



$$\vec{r}'_i = \mathbf{\Omega P_i}$$

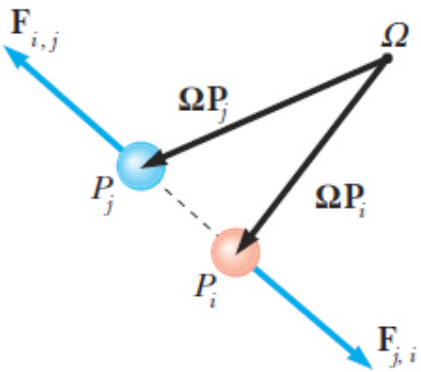
$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}'_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_\Omega$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_i - \vec{v}_\Omega\right) \times \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times \left(\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}\right)$$



$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(I)} = 0$$

La somma dei momenti delle forze interne è nulla, perché a due a due le forze interne formano una coppia a braccio nullo.

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}\,'_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times m\,\vec{v}_{cm} + \vec{M}_\Omega^{(E)}$$

2° Equazione cardinale (polo mobile)

Se $\vec{v}_\Omega \times m\,\vec{v}_{cm} = 0$ (polo Ω è fisso, oppure CM fermo, oppure Ω coincide con CM)

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega^{(E)}$$

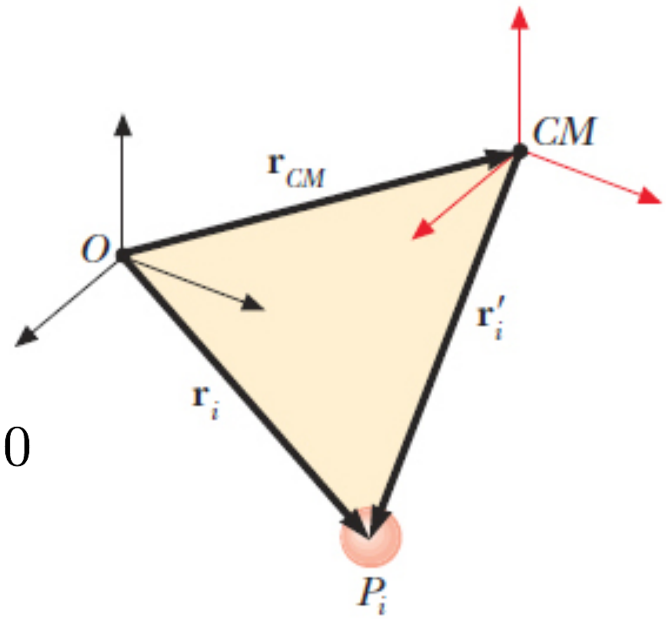
2° Equazione cardinale (polo fisso)

Se $\vec{M}_\Omega^{(E)} = 0 \;\rightarrow\; \vec{L}_\Omega = \text{cost}$ <u>Conservazione del momento angolare</u>

Se è nulla la risultante dei momenti delle forze esterne (o anche solo una sua componente secondo una certa direzione) si conserva il momento angolare (o la sua componente secondo quella direzione).

Sistema di riferimento del centro di massa

Sistema CM ha assi paralleli a quelli del sistema inerziale O
ma in generale non è inerziale (*se* $\boldsymbol{F}^{(E)} \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{a}_{cm} \neq 0$)



Rispetto al sistema del CM

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\,'_i = \sum_i m_i \left(\vec{r_i} - \vec{r}_{cm} \right) = \sum_i m_i \vec{r_i} - m \vec{r}_{cm} = 0$$

Rispetto al sistema del CM la quantità di moto totale del sistema
di punti materiali è nulla

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}\,'_i = \sum_i m_i \left(\vec{v_i} - \vec{v}_{cm} \right) = \sum_i m_i \vec{v_i} - m \vec{v}_{cm} = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}\,'_i + \vec{r}_{cm}) \times \vec{F}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}\,'_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_i^{(E)} = \vec{M}_{CM} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^{(E)}$$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{r}\,'_i + \vec{r}_{cm}) \times (\vec{v}\,'_i + \vec{v}_{cm}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\,'_i \times \vec{v}\,'_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\,'_i \times \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}\,'_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + m\,\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + m\,\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} \times \vec{v}_{cm} + m\,\vec{r}_{cm} \times \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + m\,\vec{r}_{cm} \times \vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^{(E)}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^{(E)} = \vec{M}_{CM} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^{(E)}$$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}$$

Il momento delle forze esterne calcolato prendendo come polo il CM è uguale alla derivata del momento angolare rispetto al sistema di riferimento non inerziale solidale al CM.

$$m_i \vec{a}'_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} - m_i \vec{a}_{cm}$$

$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(I)} - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}'_i \times \vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(E)} = \vec{M}'^{(E)} = \vec{M}^{(E)}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times m_i\, \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times m_i \left(\vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times m_i\, \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_{cm} = \vec{L}'$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'^{(E)}$$

Il momento angolare L con polo il CM calcolato nel sistema di riferimento inerziale, è uguale al momento angolare L’ con polo il CM calcolato nel sistema solidale al CM

Teorema di Koenig

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$ Energia cinetica totale del sistema di punti

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i$$ Trasformazione delle velocità tra il riferimento inerziale e quello solidale al CM

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(v_{cm}^2 + v\,'^2_i + 2\,\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}\,'_i\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i\, v\,'^2_i + \vec{v}_{cm} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}\,'_i$$ $= 0$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i\, v\,'^2_i$$

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma dell'energia cinetica di un punto di massa pari alla massa totale del sistema e velocità del CM, e dell'energia cinetica totale dei punti rispetto ad un riferimento solidale al CM.

Esercizio

Due punti materiali di massa m interagisco fra loro in assenza di forze esterne.
Le posizioni occupate dai punti al tempo t=0 sono $P_1(0) = (l,0)$ $P_2(0) = (0, -l)$.
Le velocità iniziali sono $v_1(0) = (0, v_0)$ $v_2(0) = (0, -v_0)$.
Sapendo che la tempo t* il punto 1 si trova nella posizione $P_1(t^*) = (0, l/2)$ con velocità $v_1(t^*) = (V,0)$, calcolare la posizione e la velocità del punto 2. Calcolare inoltre il valore di V.

In assenza di forze esterne il CM si muove di moto rettilineo uniforme (o è fermo).

La posizione iniziale del CM è $X_{CM}(0) = (l/2, -l/2)$

La velocità iniziale $V_{CM} = (0, m\,v_0 - m\,v_0) = (0,0) \rightarrow$ Il CM è fermo

Al tempo t*

$X_{CM}(t^*) = X_{CM}(0) = (l/2, -l/2) = (\,(m\,0 + x_2(t^*)\,m)/(2m),\ (ml/2 + y_2(t^*)\,m)/(2m)\,)$

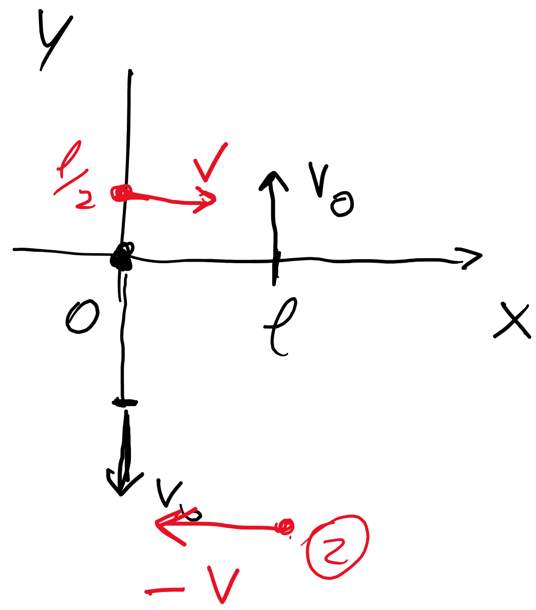
$\rightarrow$ $x_2(t^*)/2 = l/2$ $\qquad$ $x_2(t^*) = l$

$\rightarrow$ $l/4 + y_2(t^*)/2 = -l/2$ $\qquad$ $y_2(t^*) = -3/2\, l$

$V_{CM}(t^*) = V_{CM}(0) = (0,0) = (\,(m\,V + V_{2x}(t^*)\,m)/(2m),\ (m\,0 + V_{2y}(t^*)\,m)/(2m)\,)$

$\rightarrow$ $V/2 + V_{2x}(t^*)/2 = 0$ $\qquad$ $V_{2x}(t^*) = -V$

$\rightarrow$ $V_2(t^*)/2 = 0$ $\qquad$ $V_{2y}(t^*) = 0$



Posizioni e velocità iniziali
Posizioni e velocità finali

Poiché non ci sono forze esterne si conserva il momento angolare L

$\mathbf{L}(0) = (0, 0, m\,l\,v_0) = \mathbf{L}(t^*) = (0, 0, -mV\,l/2 - mV\,3/2\,l) = (0,0, -2ml\,V) \rightarrow V = -v_0/2$