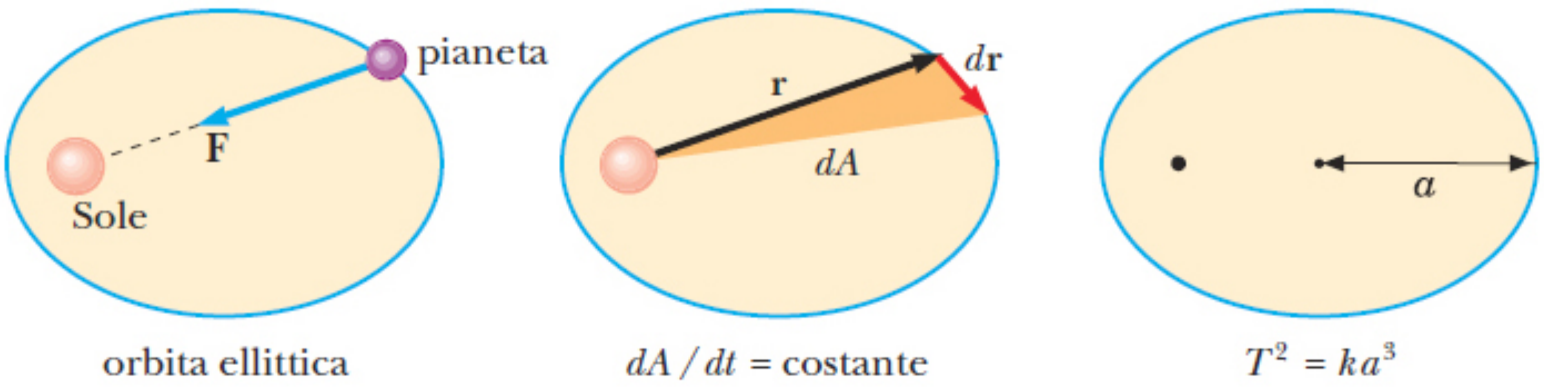
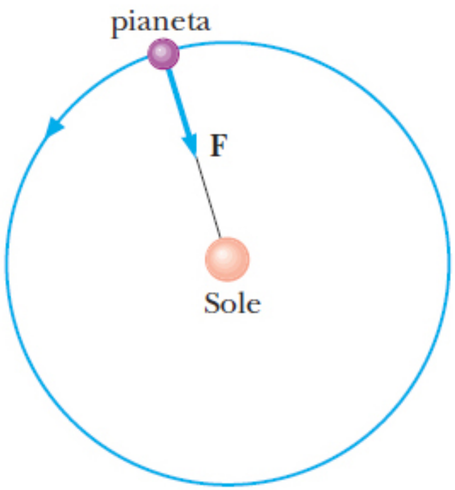
Leggi di Keplero



Newton deduce dalle leggi di Keplero la legge della forza gravitazionale.

Dalla 2° legge → la velocità areale è costante → Il momento angolare si conserva → L'orbita giace in un piano.

Dato che le orbite ellittiche dei pianeti hanno piccola eccentricità, Newton le approssima con circonferenze su cui i pianeti si muovono con velocità costante. La forza centripetal è data dall'attrazione gravitazionale del sole.



$$F = m\frac{v_1^2}{R}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

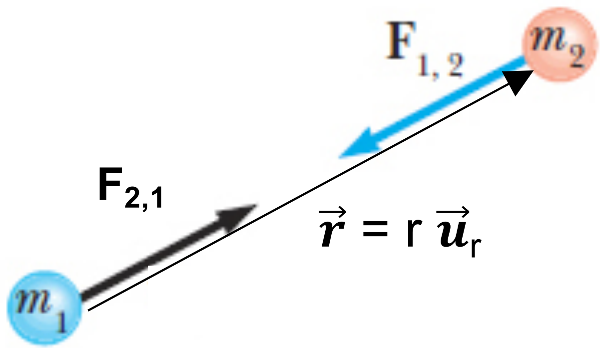
Moto circolare uniforme

$$T^2 = kR^3 \rightarrow \left(\frac{R}{T}\right)^2 = \frac{1}{kR}$$

3° legge di Keplero

$$F = m\frac{v^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m}{kR^2} \qquad \rightarrow \qquad F \propto \frac{m}{R^2}$$

Forza gravitazionale



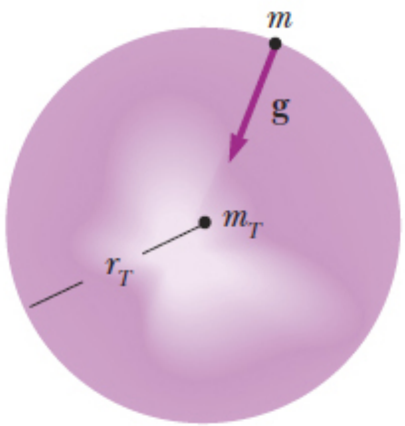
$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Forza centrale

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

$G = 6.67\ 10^{-11}$ N m^2/kg^2

Costante di gravitazione universale misurata da Cavendish nel 1798

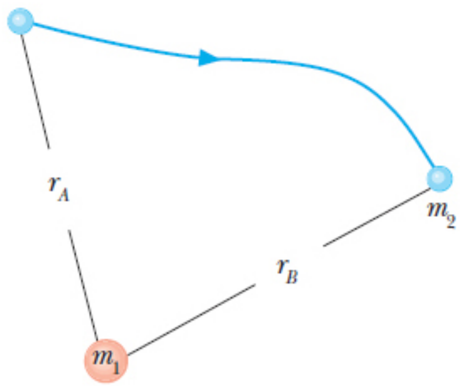


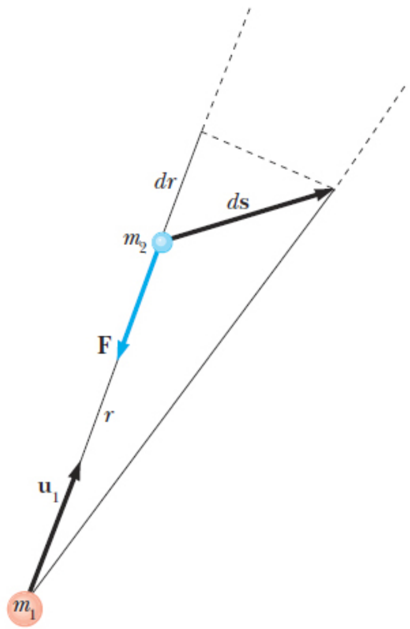
La forza peso è data dall'attrazione gravitazionale tra un corpo di massa m posto sulla superficie terrestre e la massa della Terra.

$$F_p = mg = G\frac{mM_T}{R_T^2} \quad \rightarrow \quad g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

In questo calcolo si applica la forza gravitazionale considerando la Terra puntiforme e la sua massa concentrata nel centro. Vedremo che il teorema di Gauss dimostra la validità di questa assunzione.

Energia potenziale gravitazionale



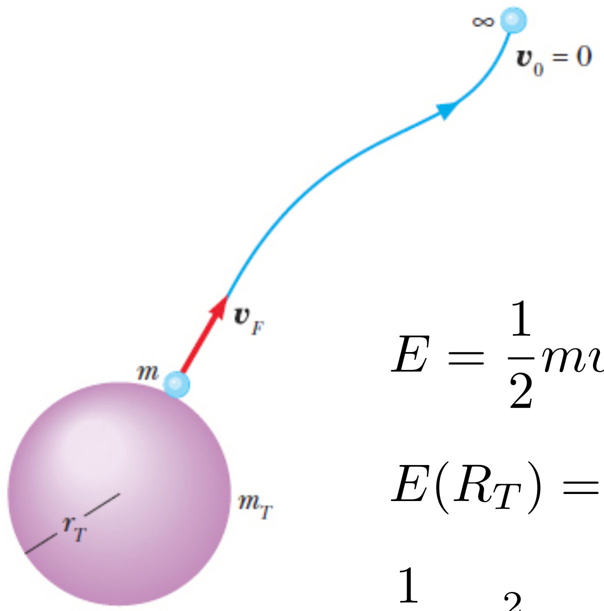


$$\mathcal{L} = \int_{\widehat{AB}} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{s} = -\int_{r_A}^{r_B} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$\mathcal{L} = U(A) - U(B)$$

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} + c$$

Velocità di fuga



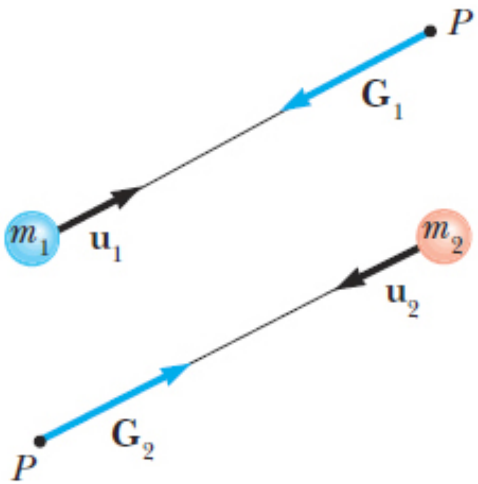
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{r} = \text{cost}$$

$$E(R_T) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = E(r \to \infty) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{1}{2}mv_F^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0 \qquad v_0 = 0$$

$$v_F = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 6300\,\mathrm{km}} \simeq 11\ \mathrm{km/s}$$

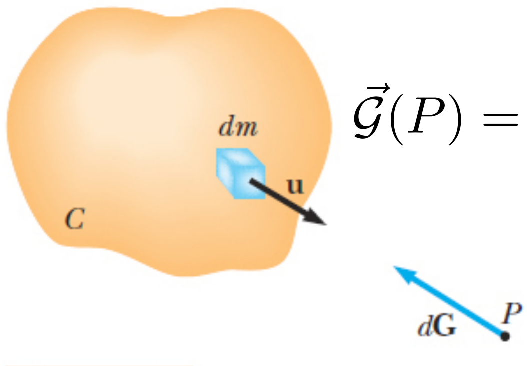
Campo gravitazionale



$$\vec{\mathcal{G}}_1(P) = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_2} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}_1 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{1,2} = m_2\vec{\mathcal{G}}_1(P)$$

$$\vec{\mathcal{G}}_2(P) = \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_1} = -G\frac{m_2}{r^2}\vec{u}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{2,1} = m_1\vec{\mathcal{G}}_2(P)$$

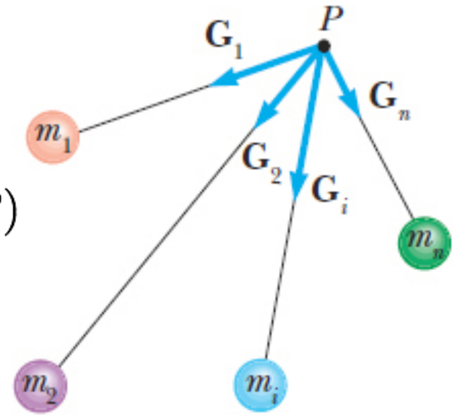
<u>Principio di sovrapposizione dei campi</u>



$$\vec{\mathcal{G}}(P) = \int -G\frac{dm}{r^2}\vec{u}$$

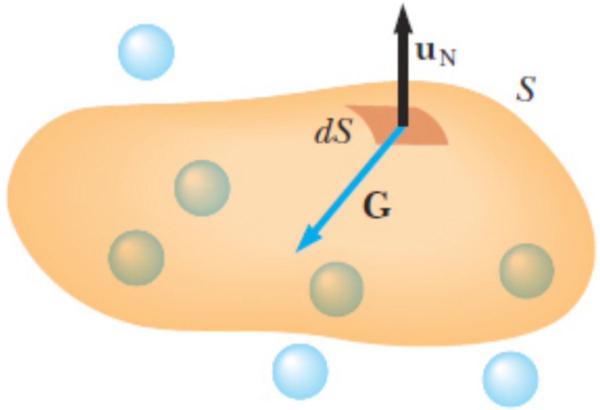
Distribuzione continua di massa

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = \sum \vec{\mathcal{G}}_i(P)$$



Distribuzione discreta di masse

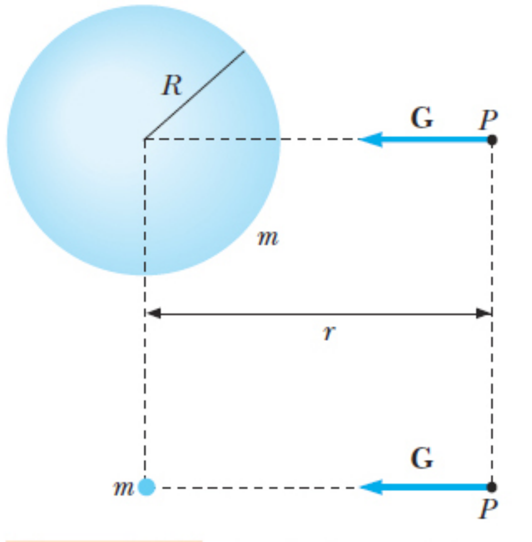
Teorema di Gauss



$$d\Phi(\vec{\mathcal{G}}) = \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{u}_n \, dS$$ Flusso del campo

$$\Phi(\vec{\mathcal{G}}) = \int_S \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{u}_n \, dS$$ Flusso attraverso una superficie S chiusa

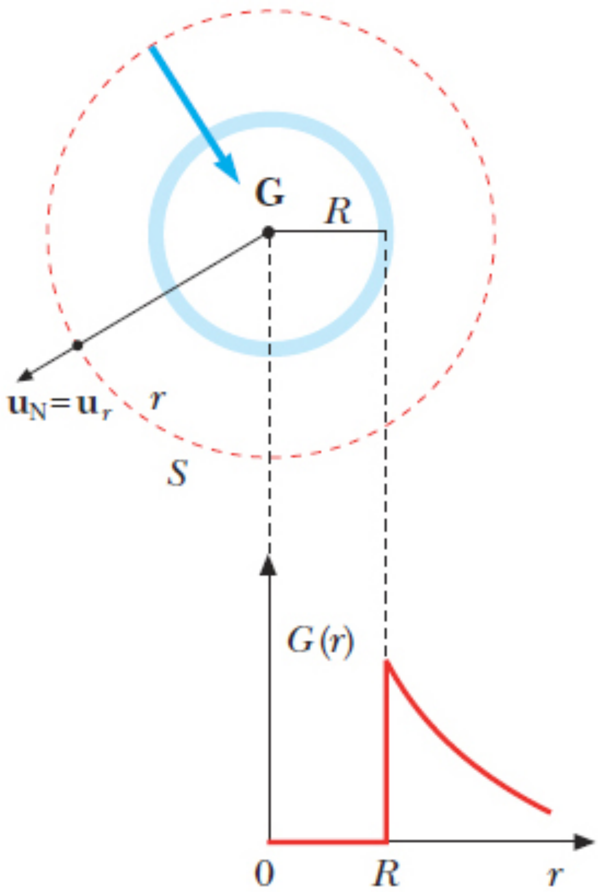
$$\Phi(\vec{\mathcal{G}}) = -4\pi \sum_I m_i$$ Teorema di Gauss



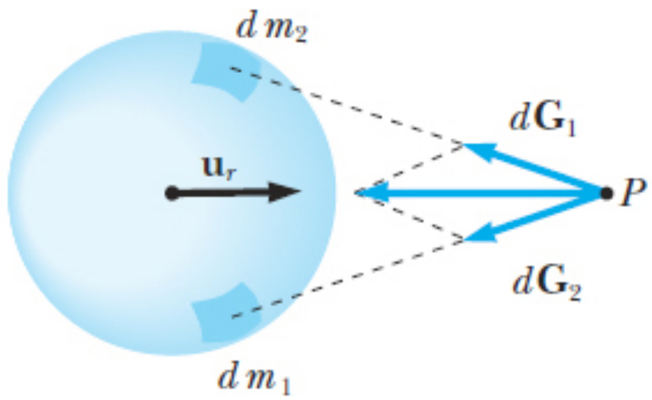
Il flusso del campo gravitazionale calcolato su di una superficie chiusa S è proporzionale alla somma delle masse contenute all'interno di S.

Dal teorema di Gauss segue che il campo gravitazionale generato all'esterno di una distribuzione sferica uniforme di massa è uguale a quello generato dalla stessa massa concentrata nel centro della distribuzione.

Campo gravitazionale di una massa distribuita uniformemente su superficie sferica



Il campo gravitazionale generato da una distribuzione sferica uniforme di massa all'esterno della distribuzione ha direzione radiale in ogni punto e dipende solo dalla distanza dal centro della distribuzione

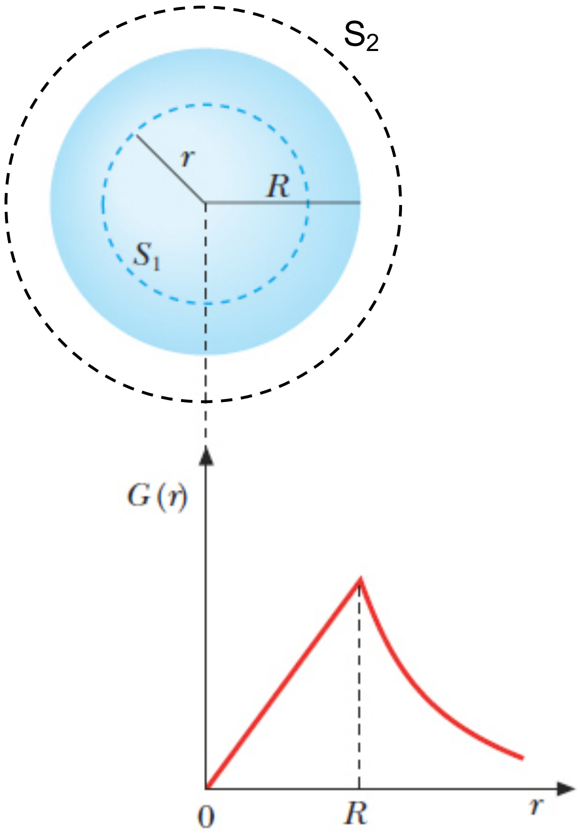


$$\Phi(\vec{\mathcal{G}}) = -4\pi G \sum_i m_i$$

$$\mathcal{G} 4\pi r^2 = -4\pi G M$$

$$\mathcal{G}(r) = \begin{cases} - \quad G\frac{M}{r^2} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Campo gravitazionale di una distribuzione sferica unifome di massa



$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$ Densità uniforme di massa

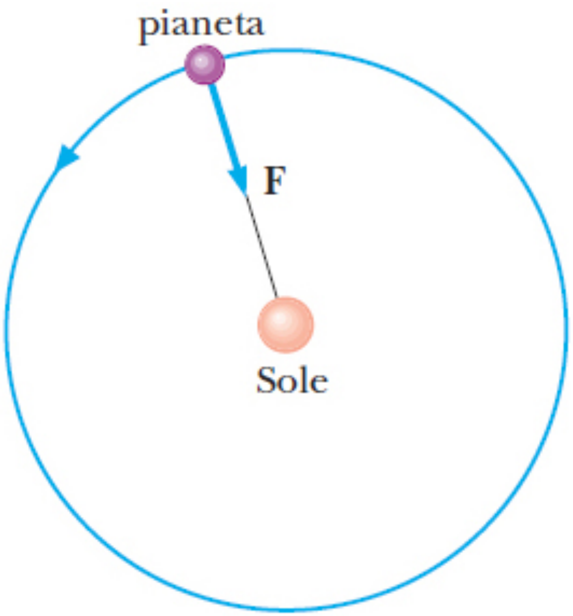
$$\Phi(\vec{\mathcal{G}}) = -4\pi G \sum_I m_i$$ Teorema di Gauss

$$\mathcal{G} 4\pi r^2 = -4\pi G M_r = -4\pi G \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = -4\pi G M \frac{r^3}{R^3} \qquad r < R$$

$$\mathcal{G} 4\pi r^2 = -4\pi G M \qquad r \geq R$$

$$\mathcal{G}(r) = \begin{cases} -G\frac{M}{r^2} & r \geq R \\ -G\frac{M}{R^3}r & r < R \end{cases}$$

Orbite in un campo gravitazionale



Orbita circolare

La forza gravitazionale determina la forza centripeta che tiene il pianeta di massa m sull'orbita circolare

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \quad \rightarrow \quad mv^2 = G\frac{Mm}{R}$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

$$E = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2R} < 0$$

L'energia meccanica è negativa → Orbita chiusa

In generale se l'orbita non è circolare, possiamo scrivere l'energia meccanica (che si conserva in un campo di forza centrale) esprimendo la velocità in coordinate polari

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{Mm}{r}$$

Il momento angolare si conserva (forza centrale → L=costante)

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

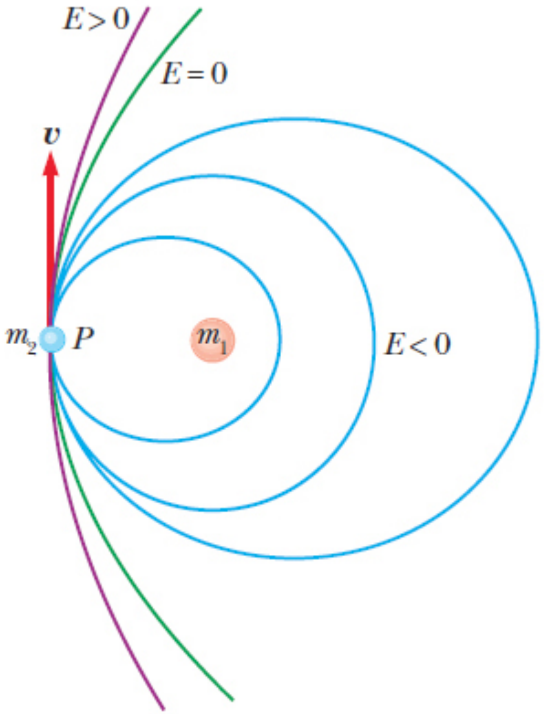
$$r\dot{\theta} = \frac{L}{mr}$$

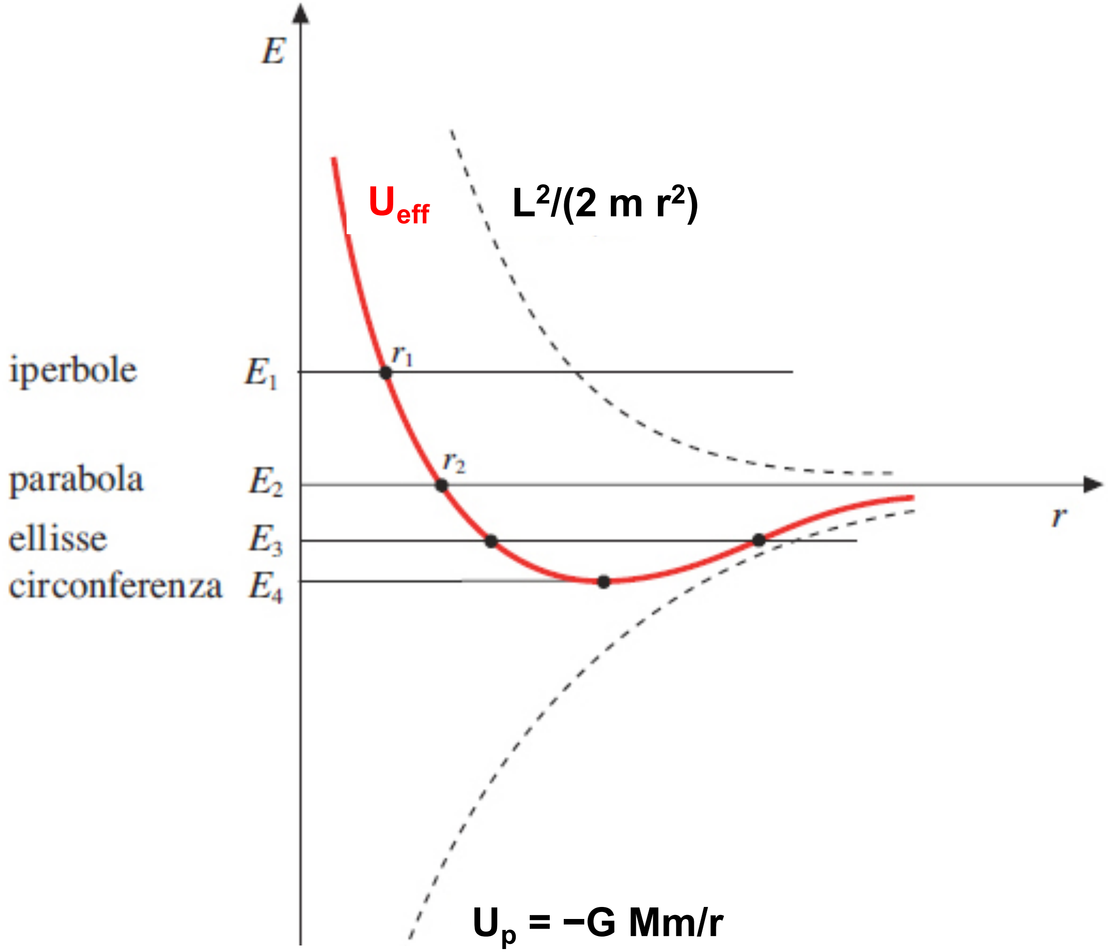
e sostituendo nell'espressione dell'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$

dove U_{eff} è l'energia potenziale efficace. Dalla conservazione di L, segue quindi che il termine dell'energia cinetica dovuto alla velocità trasversa dipende solo da r . Per tale motivo può essere interpretato come un'energia potenziale aggiuntiva.





Le possibili traiettorie in un campo gravitazionale sono coniche.
Il tipo di conica è determinato dal valore dell'energia meccanica.

Se E>=0 l'orbita è aperta (>0 iperbole, =0 parabola). Esiste un punto di massimo avvicinamente al di sotto del quale il pianeta non può andare (perché si avrebbe U_{eff} > E). In tale punto $\dot{r} = 0$

Se E<0 l'orbita è chiusa (ellisse o circonferenza).
Nel caso dell'ellisse ci sono un punto di massima (afelio) e minima (perielio) distanza dal sole, in cui $\dot{r} = 0$
Nel caso della circonferenza r=R e l'energia meccanica è minima