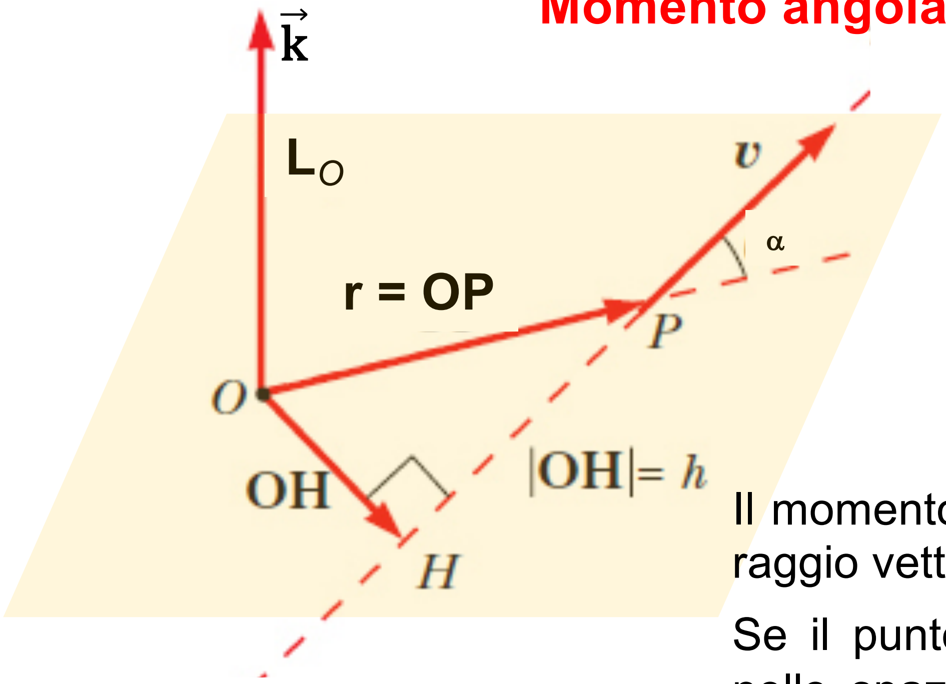
Momento angolare e momento della forza

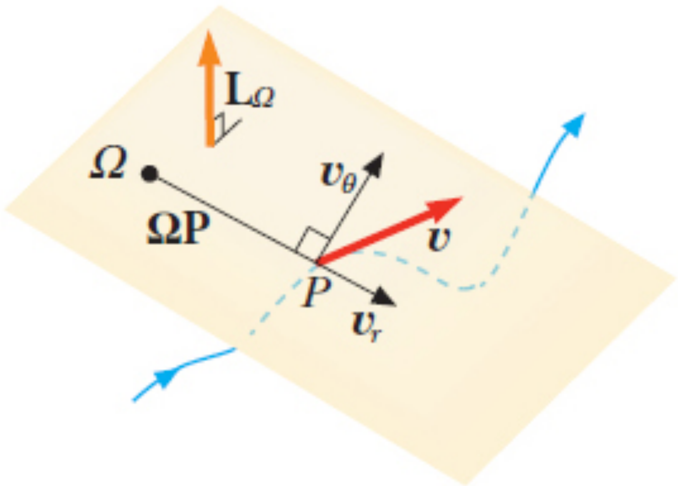


$$\vec{L}_O = \vec{r}\times\vec{p} = m\,\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\vec{L}_O = m\, v\, r \sin\alpha\, \vec{k} = m\, v\, h\, \vec{k}$$

Il momento angolare è perpendicolare al piano contenente il raggio vettore e la velocità all'istante considerato.

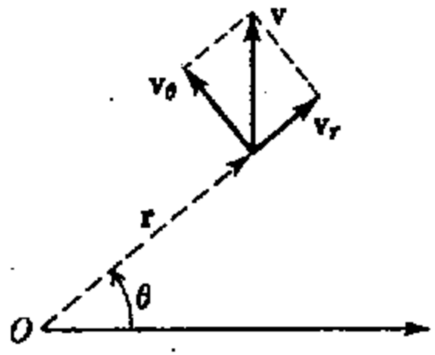
Se il punto materiale si muove lungo una traiettoria curva nello spazio, in ogni punto della curva il suddetto piano è diverso e di conseguenza varia la direzione e il modulo di L.



Se il moto è piano si può scrivere il momento angolare in coordinate polari

$$\vec{L}_O = \vec{r}\times\vec{p} = m\,\vec{r}\times(\vec{\mathbf{v}}_r + \vec{\mathbf{v}}_\theta) = m\, r\, v_\theta\, \vec{k} = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{k}$$

$$\vec{L}_O = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{k}$$



$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}) = m\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{v}} + m\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = m\,\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{v}} + m\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{M}}_O$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_O}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}_O$$

<u>Teorema del momento angolare</u>

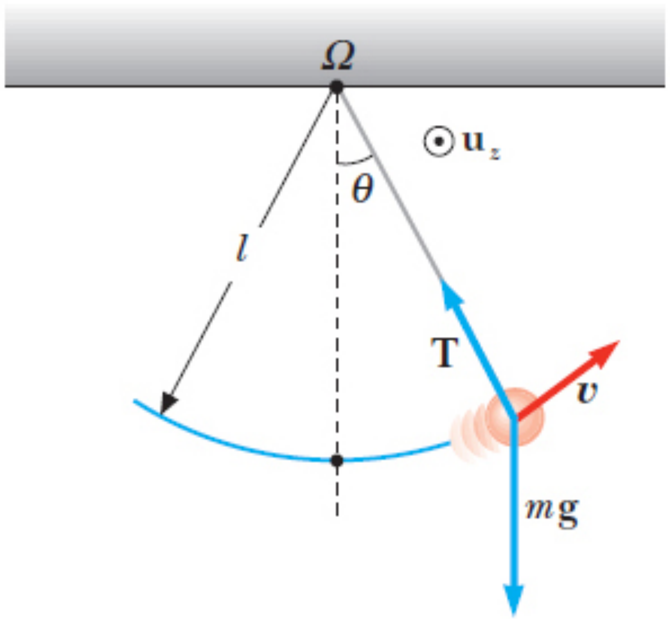
La derivata temporale del momento angolare di un punto materiale rispetto ad un polo O è uguale al momento, calcolato rispetto allo stesso polo O, della forza risultante applicata al punto.

Se $\vec{\boldsymbol{M}}_O = \boldsymbol{0}$ → $\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_O}{dt} = \boldsymbol{0}$ → $\vec{\boldsymbol{L}}_O$ = vettore costante

<u>Principio di conservazione del momento angolare</u>

Il momento angolare si conserva se il momento risultante delle forze applicato è nullo.

Pendolo semplice. Trattazione con il teorema del momento angolare



Calcoliamo il momento angolare e il momento della forza rispetto al polo Ω

Il momento della tensione è nullo perché **T** ∥ **r,** dove **r** è il vettore **ΩP**

Il momento della forza peso è ⊥ al piano del foglio e ha verso negativo (entrante nel piano).

Il momento angolare è ⊥ al piano del foglio e ha verso positivo (uscente dal piano).

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mL\hat{u}_r \times v_\theta \hat{u}_\theta = mLv_\theta\, \vec{u}_z = mL^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_p + \vec{T}\right) = -mLg\sin\theta\, \vec{u}_z$$

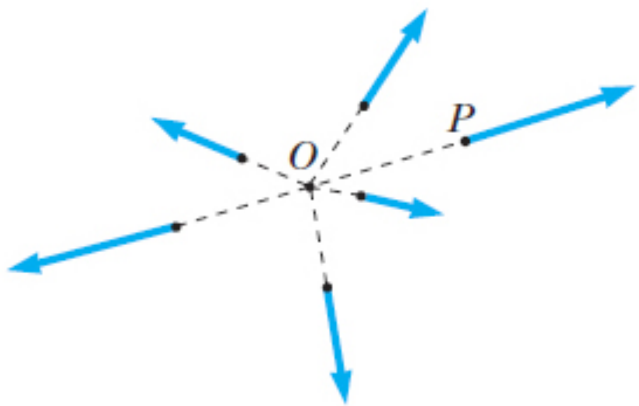
Applichiamo il teorema del momento angolare, e ritroviamo l'equazione del moto del pendolo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$mL^2\ddot{\theta}\, \vec{u}_z = -mLg\sin\theta\, \vec{u}_z$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Forze centrali



In ogni punto P dello spazio la forza ha direzione **OP**, dove O è un punto fisso detto centro della forza.

La sua intensità dipende solo dalla distanza r=|**OP**|

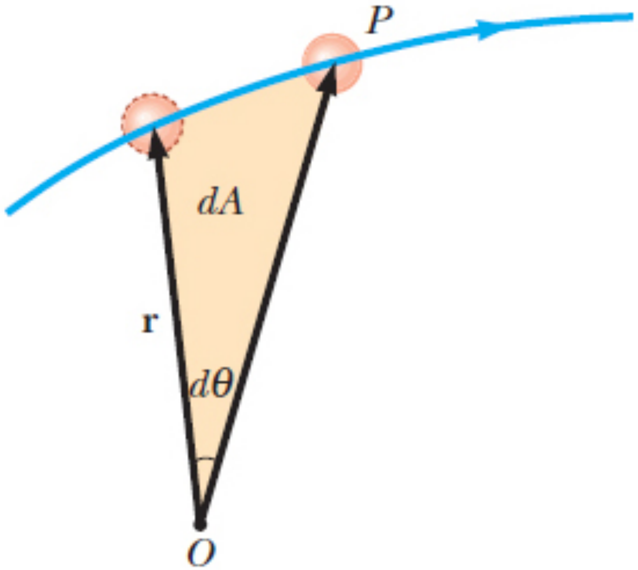
$$\vec{\boldsymbol{F}} = \pm\, F(r)\, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$$

Il campo di forza è

- attrattivo (− nella formula) se il verso della forza è $\overrightarrow{\boldsymbol{PO}}$
- repulsivo (+ nella formula) se il verso della forza è $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$

Il momento di una forza centrale rispetto ala centroo O è nullo in quanto $\vec{\boldsymbol{F}}$ // $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ → $\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_O}{dt} = \boldsymbol{0}$ → $\vec{\boldsymbol{L}}_O$ è costante.

Se **L**$_O$ si conserva significa che ha sempre la stessa direzione durante il moto. Poiché la sua direzione è perpendicolare al piano contenente **r** e **v** → **Il moto in un campo di forza centrale è piano**.

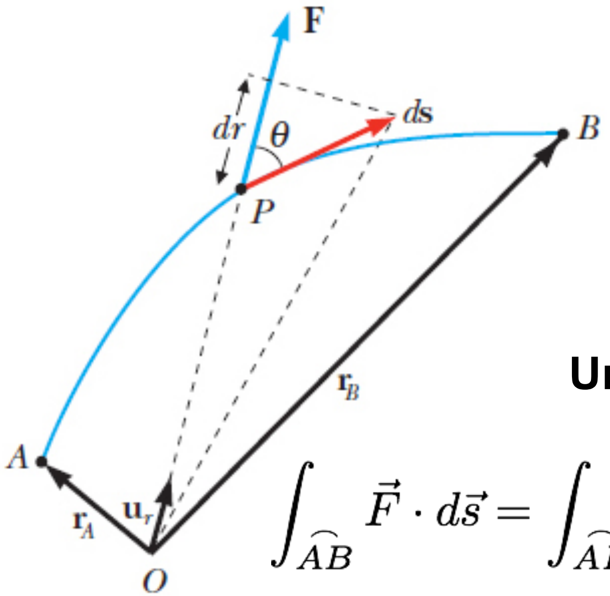


Se $\mathbf{L}_O$ si conserva, è costante anche il suo modulo $L_O = m\, r^2\, \dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\, r^2 = \frac{L_O}{m}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\dot{\theta}\, r^2 = \frac{L_O}{2m}$$

La velocità areale è costante in un campo di forza centrale, cioè il raggio vettore copre aree uguali in tempi uguali



Un campo di forza centrale è conservativo

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{AB}} F(r)\,\vec{u}_r\cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{AB}} F(r)\,\cos\theta\, ds = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\, dr = U(r_A) - U(r_B)$$