Dinamica

Principio di inerzia (1° legge della dinamica): Un corpo non soggetto a forze è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.

Galileo lo deduce da misure fatte lasciando cadere palle sferiche su piani inclinati lisci e levigati.

Nel suo libro Fisica Aristotele sosteneva che occorre una forza costante per mantenere un oggetto in moto con velocità costante.

Rivoluzione concettuale di Galileo. La forza costante serve per equilibrare la forza attrito.

Se non ci fosse attrito non servirebbe applicare una forza per mantenere un oggetto in moto rettilineo uniforme

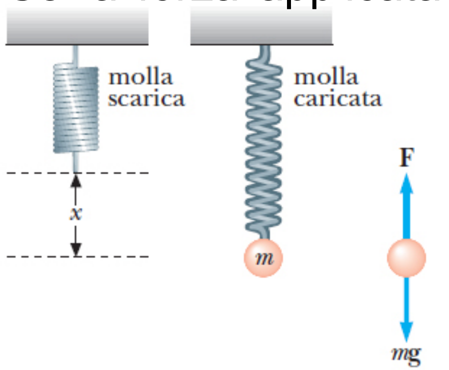
Il principio di inerzia vale nei sistemi di riferimento inerziali. Un sistema inerziale è quello in cui vale il principio inerzia.

I sistemi inerziali sono i sistemi in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro in cui valgono le leggi della dinamica. Nei sistemi non inerziali (accelerati, in rotazione, …) la seconda legge della dinamica va modificata. Ne parleremo quando si tratteranno i moti relativi.

Per definire un sistema inerziale si fa sempre un'approssimazione. Ad esempio un sistema di riferimento solidale alla Terra è inerziale se si studiano fenomeni su distanze ridotte per cui sono trascurabili gli effetti dovuti alla rotazione e rivoluzione terrestre.

2° legge della dinamica **F**=m**a**

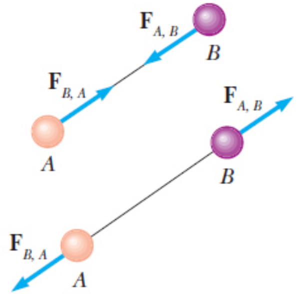
- E' un equazione differenziale vettoriale perché **a** = $d^2\mathbf{s}/dt^2$ e **F** in generale è funzione di x,y,z,t. La sua soluzione permette di ricavare la legge oraria del moto **s**(t)
- Contiene il principio di inerzia: se **F=0** → **a=0** → Moto rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{v_0}$. Se inizialmente $\mathbf{v_0}$**=0**, l'oggetto resta fermo.
- m è la massa inerziale perchè è la misura della resistenza (inerzia) che un corpooppone ad una variazione del proprio stato di moto.
- Se più forze sono applicate all'oggetto di massa m, vale il principio di sovrapposizione cioè **F** è la risultante (somma vettoriale) delle forze applicate $\mathbf{F_i}$ cioè $\mathbf{F_R=\sum F_i}$
- Se la risultante delle forze $\mathbf{F_R}$**=0** e $\mathbf{v_0}$**=0** → **Equilibrio statico**
- Il dinamometro si basa su equilibrio statico per misurare le forze applicate misurando l'allungamento x della molla (legge di Hook). Se la forza applicata è la forza peso, si possono misurare le masse come m = kx/g.



3° legge dinamica: principio di azione e reazione. Ad ogni forza corrisponde una reazione uguale e contraria. Vale nei sistemi inerziali

Le forze sono interazioni fra oggetti.

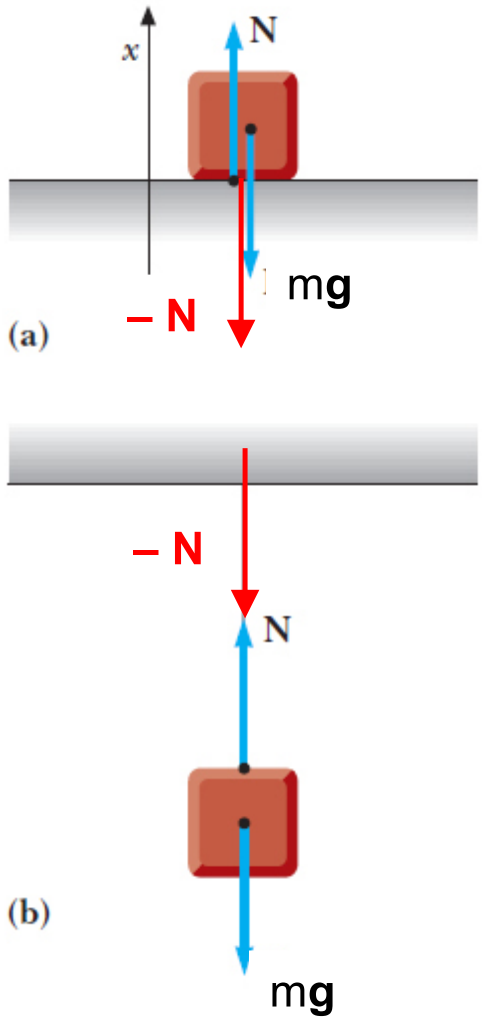
4 Interazioni fondamentali in natura: gravitazionale, elettromagnetica, nucleare forte, nucleare debole.



Forze che esamineremo nelle pagine seguenti

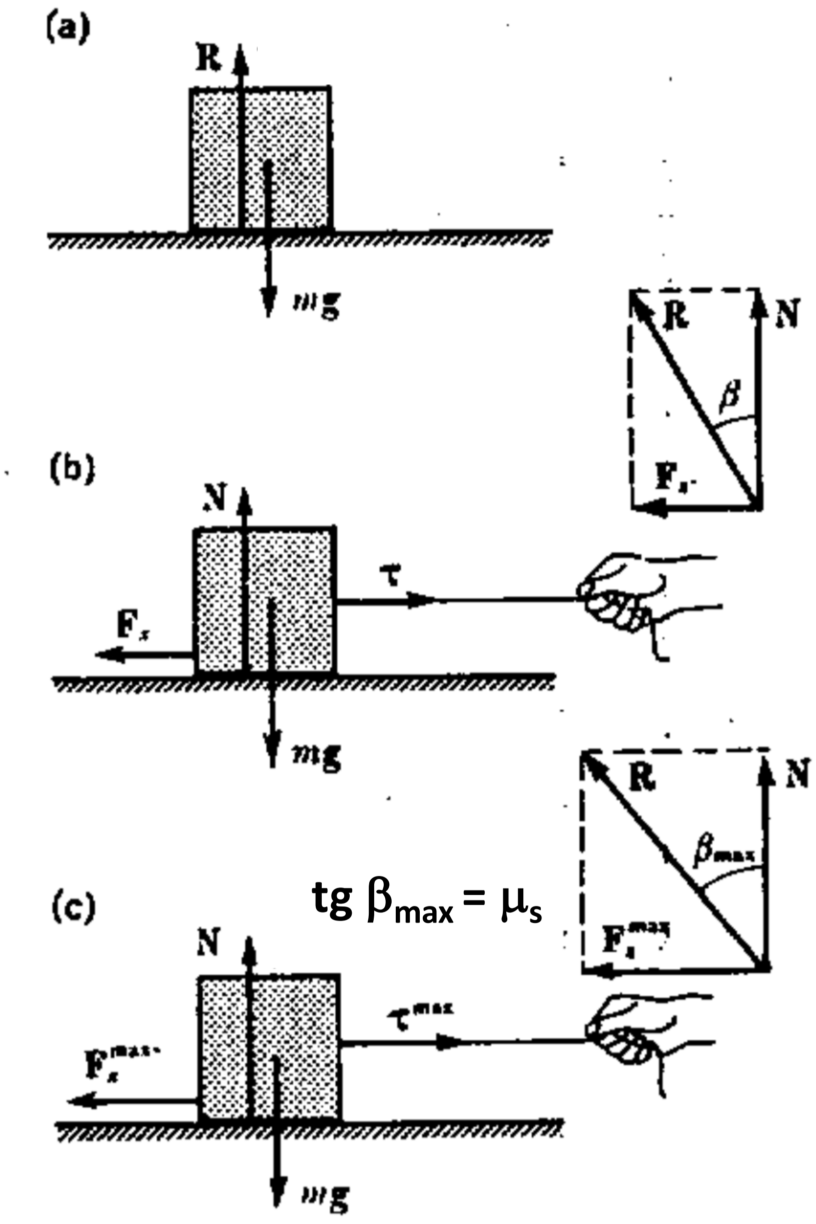
- Reazioni vincolari
- Forze di attrito radente, statico e dinamico
- Tensione di un filo inestensibile
- Forze di resistenza viscosa
- Pendolo semplice
- Forza elastica
- Accelerazione di masse collegate con fili e carrucole
- Forza centripeta. Moto in una curva circolare

Reazione vincolare



N è la reazione del vincolo (il piano di appoggio o il soffitto nei casi in figura) sull'oggetto di massa m, che gli impedisce di cadere per effetto della forza peso m**g**.
Se il vincolo è liscio (privo di attrito) la reazione vincolare è perpendicolare alla superficie del vincolo.
Per il principio di azione e reazione, al vincolo è applicata una forza uguale e opposta –**N** da parte dell'oggetto.

Forza di attrito radente



$\mathrm{tg}\,\beta_{max} = \mu_s$

(a) Blocco di massa m fermo su di un piano

$\mathbf{R} + m\mathbf{g} = 0$

La reazione vincolare **R** è ⊥ alla superficie del vincolo.

(b) Il blocco è tirato con forza τ orizzontale, non sufficiente a metterlo in moto.

Si genera quindi una forza di attrito statico

$\mathbf{F_s}$ uguale e opposta a τ → $\mathbf{F_s} + \tau = 0$

La reazione vincolare $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F_s}$

non è più perpendicolare al piano

(c) Aumentando τ si arriva ad un valore massimo τ_{max} oltre cui il blocco si mette in moto.

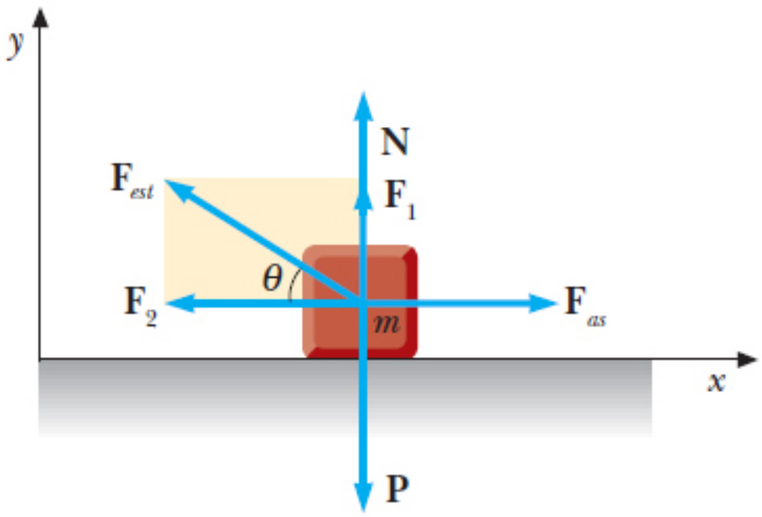
In corrispondenza di τ_{max} la superficie sviluppa una forza di attrito statica massima

$\mathbf{F_s^{max} = \mu_s N}$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico, che dipende dai materiali di cui sono fatte le superfici a contatto ma non dalla loro area.

(d) Quando l'oggetto si muove la forza di attrito dinamico è $\mathbf{F_d = \mu_d N < F_s^{max}}$ → $\mu_d < \mu_s$

Ad un oggetto di massa m fermo su di un piano di appoggio è applicata una forza esterna come mostrato in figura. Qual è il minimo valore della forza esterna per mettere in movimento l'oggetto?



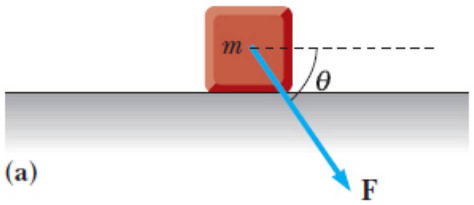
$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{est} + \vec{F}_{as} = 0$$
$$N - mg + F_{est} \sin\theta = 0$$
$$F_{est} \cos\theta - N\mu_s = 0$$

$$N = mg - F_{est} \sin\theta$$
$$F_{est} (\cos\theta + \mu_s \sin\theta) - mg\mu_s = 0$$

$$F_{est} = \frac{mg\mu_s}{(\cos\theta + \mu_s \sin\theta)} \quad *$$

La forza esterna ha componente y (F_1) positiva. Questo fa sì che N sia minore rispetto al caso in cui la forza esterna è orizzontale (θ=0 e N=mg) e di conseguenza è minore anche l'attrito statico massimo.

Se invece la forza fosse inclinata verso il basso (componente y negativa), N sarebbe maggiore di mg e quindi si avrebbe un attrito statico maggiore. In tal caso nella formula * il segno fra i due addendi al denominatore è –



(a)

Corpo in caduta in un mezzo viscoso

$$ma = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

$$\frac{dv}{\left[g - \frac{k}{m}v\right]} = dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{\left[g - \frac{k}{m}v\right]} = \int_0^t dt$$

$$\log \frac{\left[g - \frac{k}{m}v\right]}{\left[g - \frac{k}{m}v_0\right]} = -\frac{k}{m}t$$

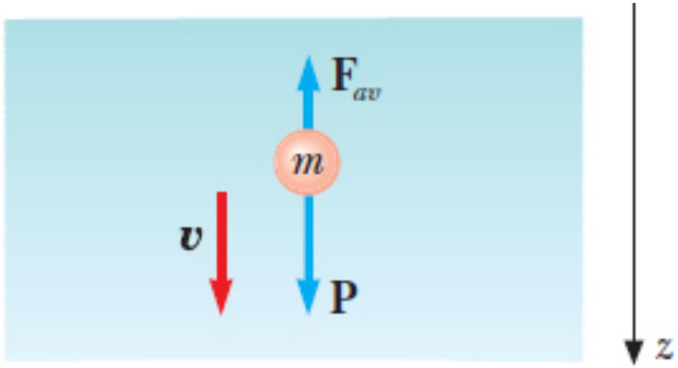
$$\left[g - \frac{k}{m}v\right] = \left[g - \frac{k}{m}v_0\right] e^{-\frac{k}{m}t}$$

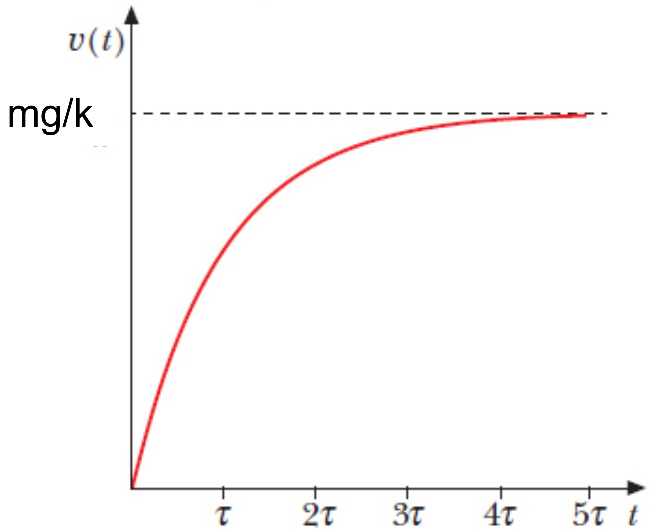
$$v = \frac{m}{k}g\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right] + v_0\, e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \frac{m}{k}g\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{m}{k}$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v_L = \frac{mg}{k}$$

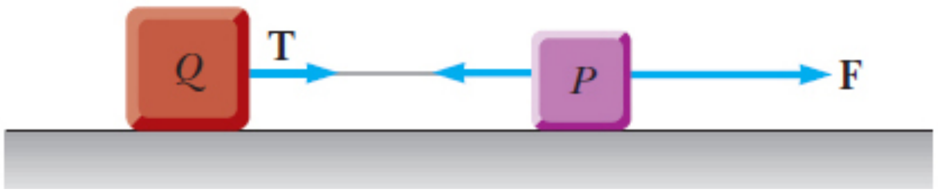




La velocità limite si raggiunge quando la resistenza viscosa (proporzionale a v) equilibra la forza peso. Da questo momento in poi il moto è rettilineo uniforme.

La velocità limite dipende dalla massa dell'oggetto. Questo spiega perchè oggetti più pesanti lasciati cadere in aria arrivano a terra prima di oggetti leggeri. Se non ci fosse la resistenza dell'aria, arriverebbero a terra simultaneamente.

Tensione di un filo

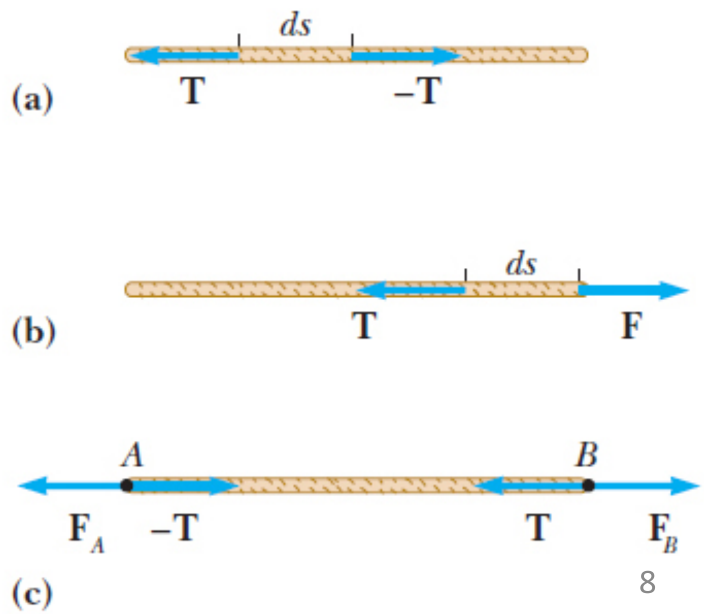


$m_P\, a_P = F - T$
$m_Q\, a_Q = T$

Il filo è inestensibile di lunghezza L e massa trascurabile
La posizione x_1 di P è legata alla posizione x_2 di Q dalla relazione $x_P = x_Q + L$
Derivando entrambi i membri dell'equazione → $a = a_P = a_Q$

$m_P\, a = F - T$
$m_Q\, a = T$
→ $a = F/(m_Q + m_P)$

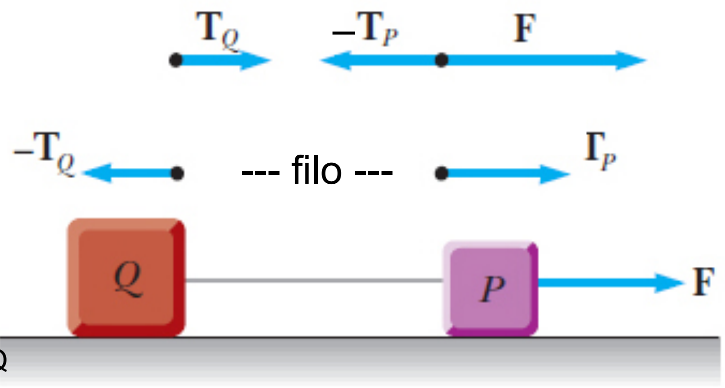
Sul filo agisce:
- all'estremità destra una forza +T (reazione dovuta a P)
- all'estremità sinistra (reazione dovuta a Q) una forza -T



Il filo è inestensibile di lunghezza L e ha massa m_F non nulla
Il filo globalmente si muove con accelerazione uguale a quella delle masse

$m_P\, a = F - T_P$
$m_Q\, a = T_Q$
$m_F\, a = T_P - T_Q$

→ $a = F/(m_P+m_Q+m_F)$



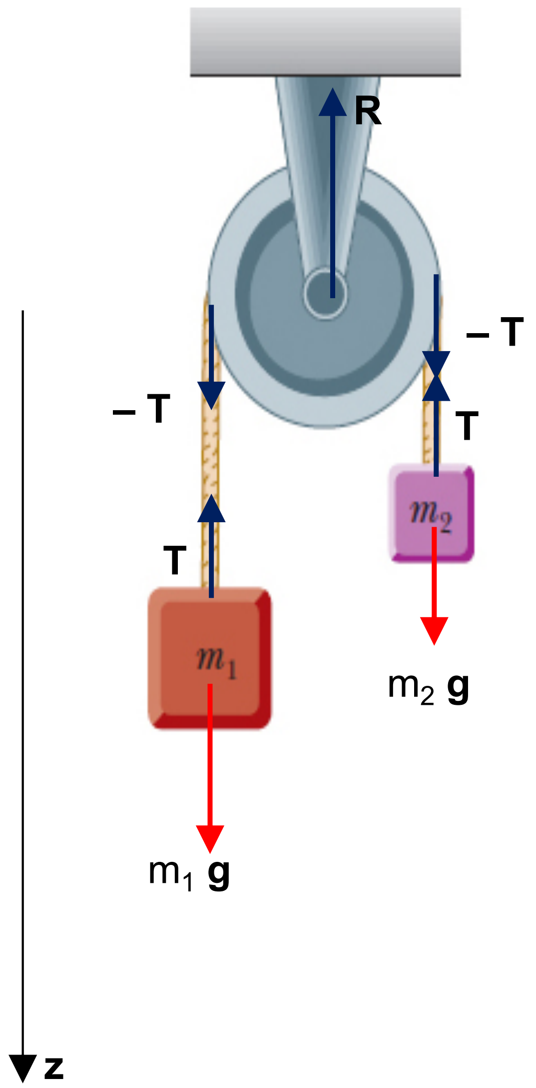
Sul filo agisce
- all'estremità destra una forza $+T_P$ (reazione dovuta a P)
- all'estremità sinistra (reazione dovuta a Q) una forza $-T_Q$

$T_P = F - m_P\, F/(m_P+m_Q+m_F) = F\,(m_Q+m_F)/(m_P+m_Q+m_F)$
$T_Q = m_Q\, F/(m_P+m_Q+m_F) = F\, m_Q/(m_P+m_Q+m_F)$

Su un generico punto del filo a distanza x da Q la tensione è
$T(x) = F\, m_Q/(m_P+m_Q+m_F) + F\, m_F/(m_P+m_Q+m_F)\, x/L$

Infatti si ritrova
$T(0) = T_Q$
$T(L) = T_P$

Quindi se il filo ha massa non nulla, la tensione è variabile da punto a punto



Macchina di Atwood

Carrucola di massa nulla
Forze di attrito trascurabili

$m_1\, a_1 = m_1\, g - T$
$m_2\, a_2 = m_2\, g \ \ - T$

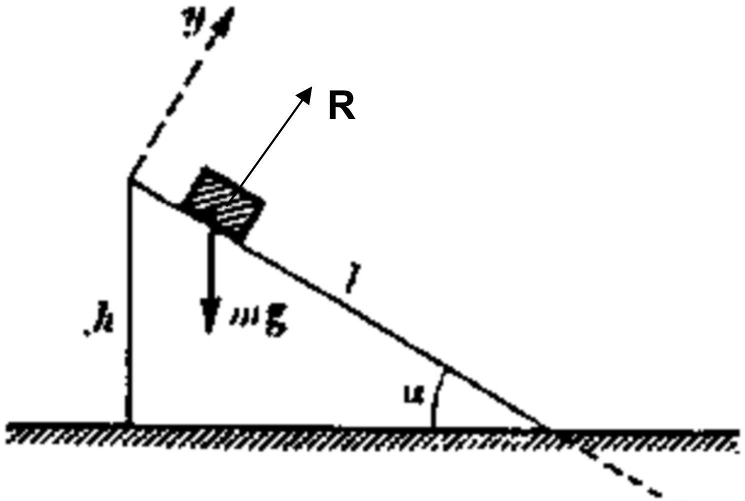
$-a_2 = a_1 = a$ poiché $x_1 = L - x_2$

$m_1\, a = m_1\, g - T$
$-m_2\, a= m_2\, g - T$

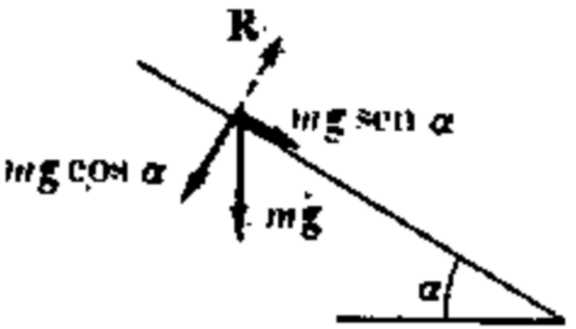
Sottraendo la seconda equazione dalla prima
$(m_1 - m_2)\, a = (m_1+m_2)\, g$
$A = g\, (m_1+ m_2)/(m_1 - m_2\,)$
$T= m_1\, g - m_1\, a = 2\, m_2\, m_1\, g/(m_1+m_2)$

La reazione vincolare sulla carrucola è
$R = 2T$

Moto su di un piano inclinato



(a)



(b)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha$$

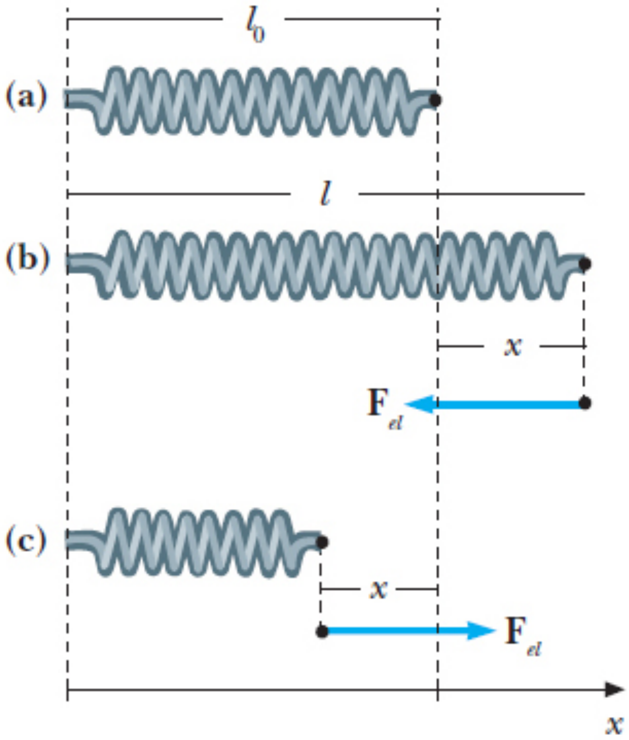
$$m\ddot{y} = 0 = -mg\cos\alpha + R \qquad \rightarrow R = mg\cos\alpha$$

$$\ddot{x} = g\sin\alpha \qquad \rightarrow \qquad v(t) = v_0 + g\sin\alpha\, t$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g \sin\alpha\, t^2$$

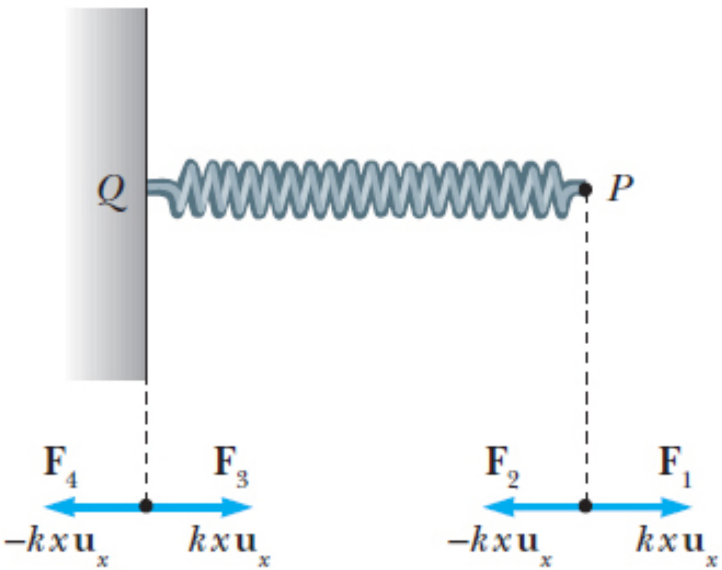
Moto uniformemente accelerato lungo il piano inclinato con accelerazione g sinα

Forza elastica. Legge di Hooke



$$\mathbf{F = – k\ (l – l_0) = – k\ x}$$

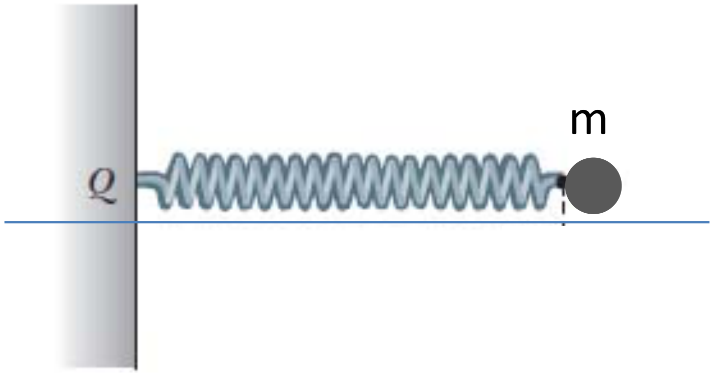
La forza è proporzionale allo spostamento e ha verso opposto
Il segno – indica che la forza tende a riportare la molla nella sua posizione di riposo (l_0)



<u>Caso statico</u>
F_1 applicata all'estremo destro della molla
$F_2 = – F_1$ reazione che la molla esercita su P
F_3 applicata all'estremo sinistro della molla
$F_4 = – F_3$ reazione che la molla esercita su Q

Poiché la molla è in quiete → $F_1 = F_3$
cioè la forza si trasmette inalterata lungo la molla

Punto materiale di massa m fissato ad un estremo della molla (che ha massa nulla) su un piano orizzontale



$$m\ddot{x} = -k(l - l_0) = -kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ Moto armonico

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$ Soluzione dell'equazione differenziale lineare di 2° secondo ordine

Pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Periodo

La velocità del punto materiale si ottiene derivando x(t) $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$

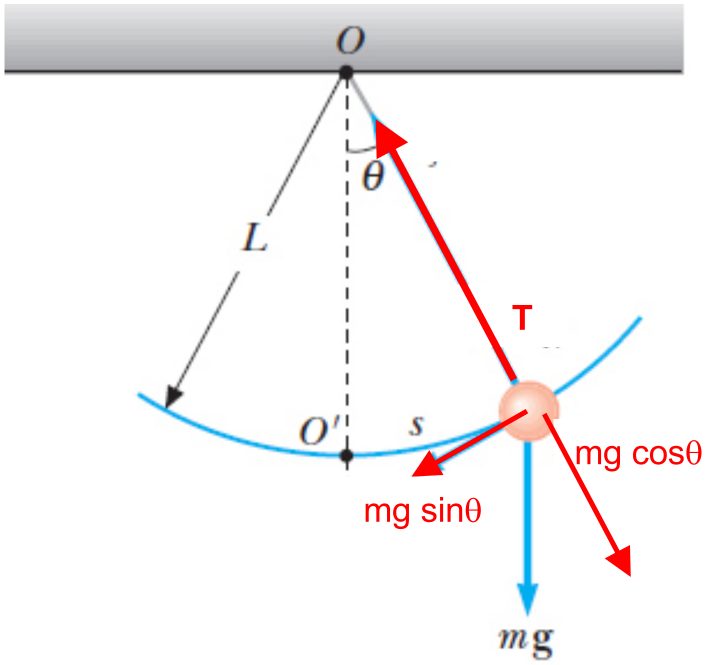
L'ampiezza A e la fase f nella legge oraria del moto si determinano in base alle condizioni iniziali, cioè alla posizione e alla velocità iniziale del punto materiale
Ad esempio se le condizioni iniziali sono $x(0) = L$ $\qquad v(0) = 0$

si ricava $L = A\cos\phi$

$$0 = -A\omega\sin\phi \rightarrow \phi = 0 \rightarrow A = L$$

$$x(t) = L\cos(\omega t)$$

Pendolo semplice



$$\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_\theta\hat{u}_\theta = \left(\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r\right)\hat{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{u}_\theta$$

$$\vec{r} = L\hat{u}_r \rightarrow \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0$$

$$\vec{a} = -m\dot{\theta}^2 r\hat{u}_r + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta$$

Accelerazione in coordinate polari per traiettoria circolare

$$ma_r = mg\cos\theta - T$$
$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

Seconda legge della dinamica nelle componenti polari

$$-m\dot{\theta}^2 L = mg\cos\theta - T$$
$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

Per piccole oscillazioni sin θ ~ θ

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$$

Moto armonico

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Periodo indipendente da θ (per piccole oscillazioni)
→ **isocronismo del pendolo**

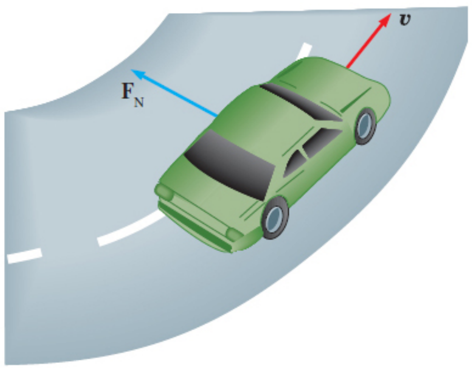
Condizioni iniziali - caso 1

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad v(0) = 0$$
$$\theta_0 = A\cos\phi$$
$$0 = -A\omega\sin\phi \rightarrow \phi = 0 \rightarrow A = \theta_0$$
$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$$

Condizioni iniziali - caso 2

$$\theta(0) = 0 \qquad \vec{v}(0) = v_0\hat{u}_\theta$$
$$0 = A\cos\phi \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{v_0}{L} = -A\omega\sin\phi \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega L}$$
$$\theta(t) = -\frac{v_0}{\omega L}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Forza centripeta



Esempio 1 - Curva circolare su strada piana

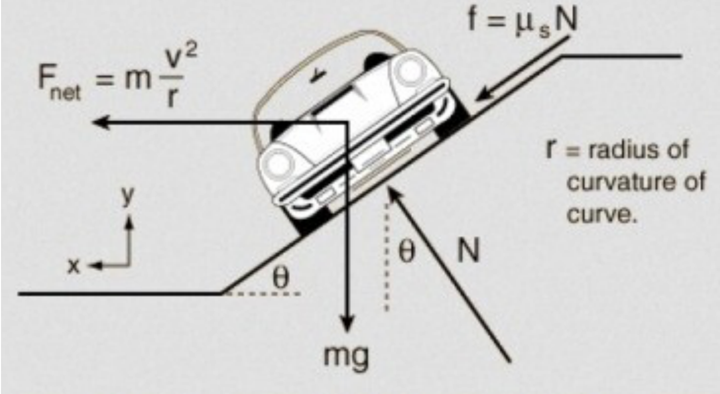
L'auto percorre la curva circolare di raggio r senza sbandare se la forza centripeta è data dall'attrito statico (perché non c'è spostamento radiale) fra i pneumatici e l'asfalto.

$m\, v^2/r = F_{as}$

La velocità massima v_M con cui può essere affrontata la curva si ha quando la forza centripeta è uguale alla forza di attrito statico massima

$m\, v_M{}^2/r = \mu_s\, N = \mu_s\, m\, g$ (N è la reazione vincolare del piano)

$v_M = (\mu_s\, r\, g)^{1/2}$



Esempio 2 – Moto in curva sopraelevata

Qual è la velocità massima per cui l'auto percorre la curva sopraelevata con velocità costante lungo un arco di circonferenza?

Se la curva è liscia

$m\, v^2/r = N \sin\theta$

$N \cos\theta = mg$

$m\, v^2/r = mg\, tg\theta \rightarrow v = [rg\ tg\ \theta]^{1/2}$

Se la curva presenta attrito

$m\, v^2/r = N \sin\theta + \mu_s N \cos\theta$ (lungo x)

$N \cos\theta - mg - \mu_s N \sin\theta = 0$ (lungo y)

Dalla seconda equazione si ricava $N= mg/(\cos\theta - \mu_s N \sin\theta)$

Che sostituita nella prima dà $v = [\, rg\, (\sin\theta + \mu_s \cos\theta)/(\cos\theta - \mu_s N \sin\theta)]^{1/2}$

Questa formula per v si riduce a quella della curva liscia se μ_s=0

Se θ=0 si riduce alla formula della curva piana dell'esempio 1