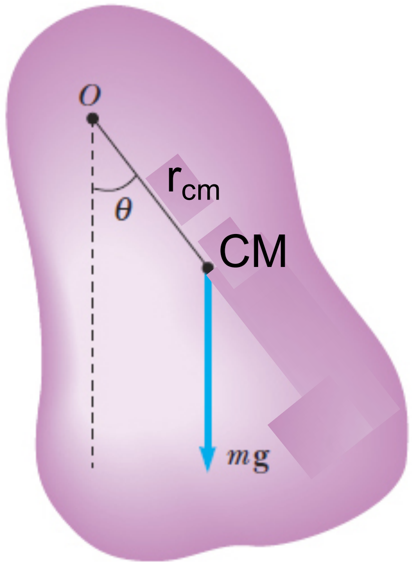
Pendolo composto



L'asse di rotazione (z) passa per il punto O (diverso dal CM) ed è orizzontale (uscente dal piano del foglio). La reazione vincolare in *O* non dà momento rispetto ad O. L'unica forza che dà momento è la forza peso. Sommando i momenti della forza peso agente su ciascun elemento di massa del corpo si ottiene

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{g}\, dm = \left(\int \vec{r}\, dm \right) \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g}$$

come se tutta la massa fosse concentrate nel CM.
La componente del momento della forza peso lungo l'asse di rotazione è

$$M_z = -mgr_{cm} \sin\theta$$

dove il segno – tiene conto del fatto che la forza peso agisce con un momento "di richiamo": ad angoli positivi deve corrispondere un'accelerazione angolare negativa, tendente a riportare il pendolo verso la posizione verticale di equilibrio.
L'equazione del momento angolare assiale è (dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse z)

$$I\dot{\omega} = M_z$$

$$I\ddot{\theta} = -mgr_{cm} \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgr_{cm}}{I} \sin\theta$$

Equazione differenziale
analoga a quella del pendolo semplice

Per piccole oscillazioni ($\sin\theta \simeq \theta$), si ottiene l'equazione del moto armonico

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgr_{cm}}{I}\theta$$

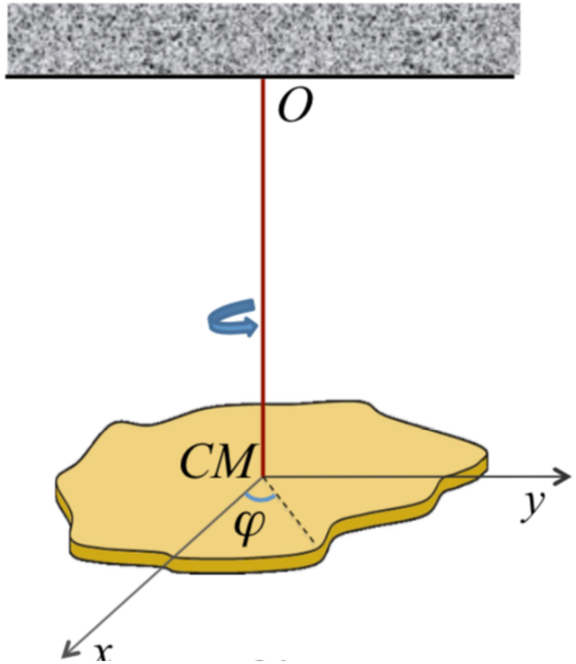
che ha per soluzione

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos\left(\Omega t + \theta_0\right)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_{cm}}}$$

Pendolo di torsione



Se si appende un corpo rigido con un filo verticale agganciato nel suo CM, le forze esterne agenti sul corpo appeso (forza peso e tensione del filo) hanno risultante e momento risultante nullo rispetto al punto *0* → Il CM è fermo in equilibrio.

Se si ruota il corpo rigido intorno all'asse, il filo si torce e reagisce producendo un momento delle forze τ che si oppone alla torsione

$$\vec{\tau} = -C\phi\ \hat{k}$$

proporzionale all'angolo di rotazione ϕ e diretto come l'asse di rotazione. La costante C è il coefficiente di torsione e dipende dal materiale e dalla sezione del filo.

Scrivendo l'equazione del momento angolare assiale, si ottiene un'equazione differenziale lineare di secondo ordine analoga a quella del moto armonico

$$I\dot{\omega} = \vec{\tau}$$

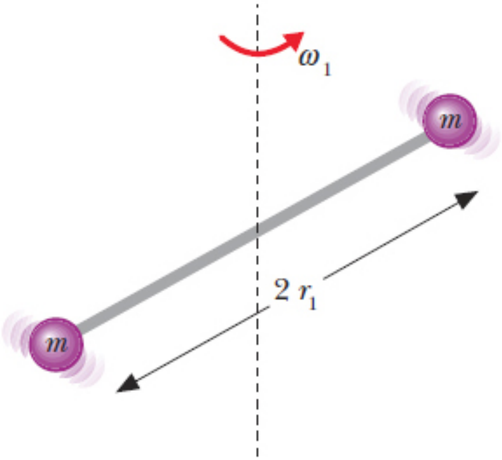
$$I\ddot{\phi} = -C\phi$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{C}{I}\phi \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = \phi_{max}\cos\left(\Omega t + \phi_0\right)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

Sistema con momento di inerzia variabile



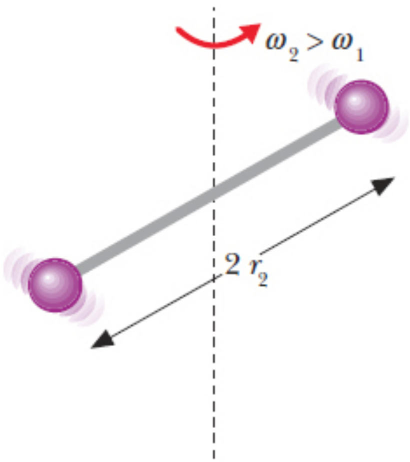
Se il momento di inerzia del corpo rigido cambia durante il moto per effetto di forze interne, o forze a momento risultante nullo, il momento angolare assiale si conserva.
Nell'esempio in figura si ha:

$$I_1\,\omega_1 = I_2\,\omega_2$$

$I_1 = 2m\,r_1^2$ $\qquad\qquad$ $I_2 = 2m\,r_2^2$

$$\omega_2 = I_1/I_2\,\omega_1$$

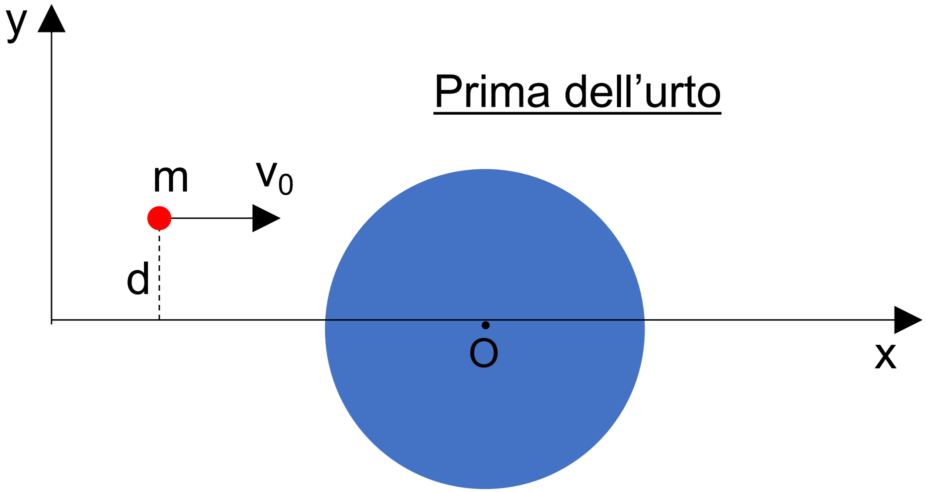
Se $r_2 < r_1 \rightarrow \omega_2 > \omega_1$



Urto di un punto materiale con un corpo rigido

Un punto di materiale di massa m si muove con velocità v_0 lungo l'asse x e colpisce un disco inizialmente fermo di massa M e raggio R. Il punto di impatto P si trova a distanza d<R dall'asse x. Il punto materiale dopo l'urto rimane conficcato nel disco. Calcolare la velocità angolare del sistema dopo l'urto nei due casi:

1) il disco è vincolato ad un asse verticale z (perpendicolare al foglio) passante per il suo centro O
2) Il disco è libero di muoversi sul piano xy (liscio)

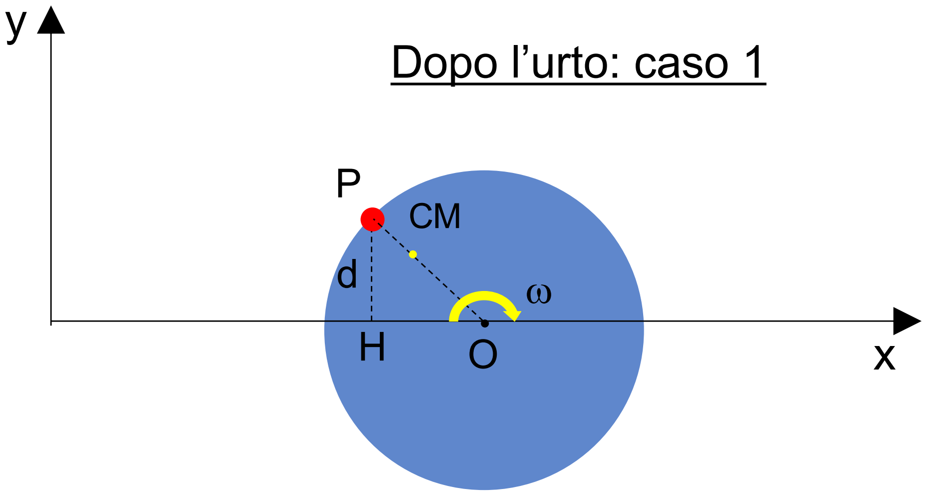


Caso 1

Nell'urto, nel punto di impatto P si sviluppano forze interne impulsive. Se fossero le sole forze impulsive presenti, si conserverebbe sia la quantita di moto **P** che il momento angolare **L**

Però nell'urto la reazione vincolare dell'asse in O è anch'essa una forza breve e intensa (impulsiva) ed è esterna al sistema
→ Non si conserva **P**

L rispetto al polo O si conserva perché la reazione ha momento nullo (essendo applicata nel polo). **L** è parallelo a z (asse di rotazione uscente dal foglio)



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$ Momento di inerzia del disco rispetto ad asse z

$$I' = I + mR^2$$ Momento di inerzia del disco + massa m

$$L = mv_0 d = I'\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$ Conservazione del momento angolare lungo z

$$\omega = \frac{2mv_0 d}{(M+2m)R^2}$$

Le coordinate del CM rispetto ad O, dopo che il punto materiale è rimasto conficcato, sono

$$y_{cm} = \frac{md}{M+m}$$

$$x_{cm} = -\frac{m\sqrt{R^2 - d^2}}{m+M}$$

$$r_{cm} = \sqrt{x_{cm}^2 + y_{cm}^2} = \frac{mR^2}{M+m}$$

Il CM dopo l'urto descrive una circonferenza di raggio r_{cm} con velocità tangenziale

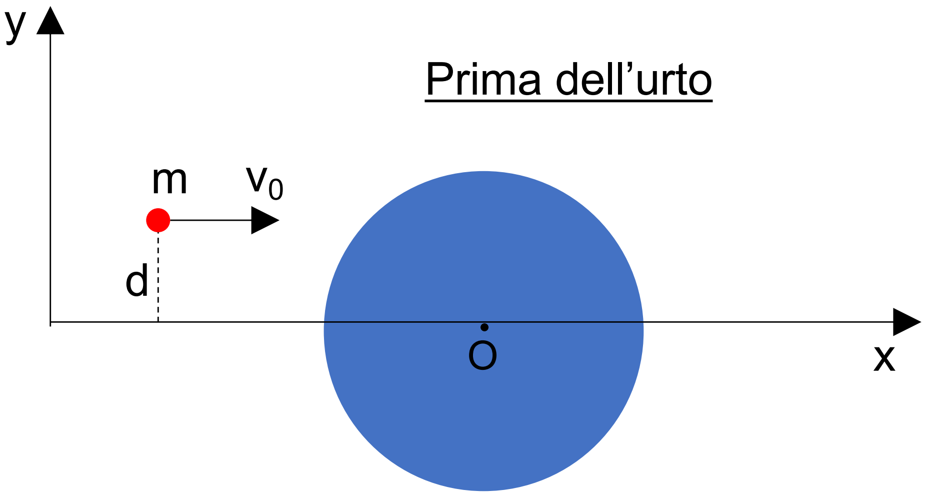
$$v_{cm} = \omega r_{cm} = \frac{mR^2\omega}{M+m}$$

L'impulso della reazione vincolare è dato dalla differenza fra la quantità di moto dopo e prima dell'urto

$$\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = (m+M)\vec{v}_{cm} - mv_0\hat{x}$$

$$\vec{J} = [(M+m)v_{cm}\sin\theta - mv_0]\,\hat{x} + (M+m)v_{cm}\cos\theta\;\hat{y}$$

dove $\sin\theta = d/R$



Caso 2

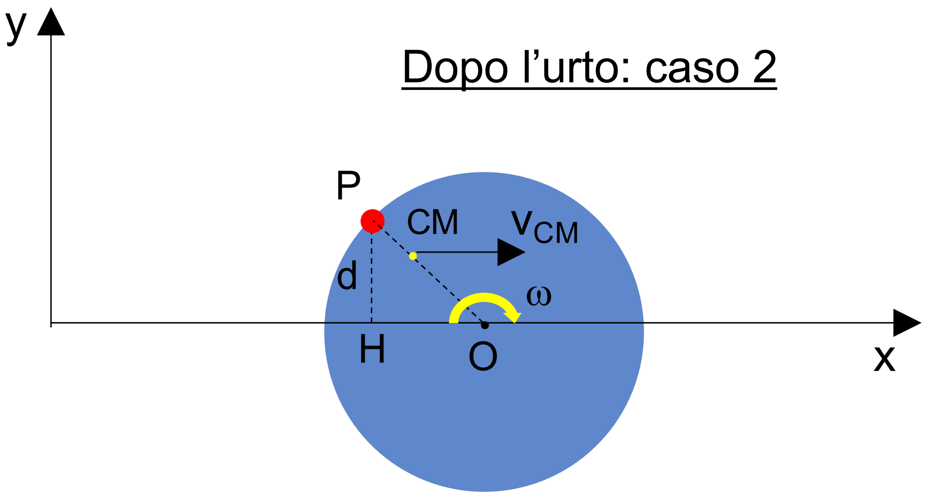
Nell'urto, nel punto di impatto P si sviluppano forze interne impulsive. Non essendo il disco vincolato, non ci sono forze esterne impulsive → si conservano sia **P** che **L**

$$mv_0 = (M+m)v_{cmx}$$ conservazione $\mathbf{P_x}$

$$0 = (M+m)v_{cmy}$$ conservazione $\mathbf{P_y}$

$$v_{cmx} = \frac{mv_0}{M+m}$$

$$v_{cmy} = 0 \quad \rightarrow \quad y_{cm} = \mathrm{cost} = \frac{md}{M+m}$$



Dopo l'urto, il CM del sistema si muove di moto rettilineo uniforme lungo x. La sua coordinata y resta costante

Il sistema inoltre ruota intorno al CM. Per trovare la velocità di rotazione si applica la conservazione del momento angolare calcolato prendendo come polo il CM

$$L = mv_0(d - y_{cm}) = I_{cm}\omega$$

Il momento di inerzia del sistema va calcolato rispetto ad un asse perpendicolare al disco e passante per il CM, ed è la somma del momento di inerzia del disco e di quello della massa m in P. Per il disco si usa il teorema di Huygens-Steiner per calcolare il momento di inerzia a partire da quello riferito ad un asse parallelo passante per O

$$I_{cm} = m(R - r_{cm})^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2 + Mr_{cm}^2\right) = \frac{1}{2}MR^2\,\frac{M+3m}{M+m}$$

Sostituendo nell'equazione di conservazione del momento angolare, si ricava la velocità angolare

$$L = mv_0(d - y_{cm}) = I_{cm}\omega$$

$$mv_0 Md = \frac{1}{2}MR^2\,\frac{M+3m}{M+m}\omega$$

$$\omega = \frac{2mv_0 d}{(M+3m)R^2}$$

Il moto di un punto P' qualsiasi del disco è una combinazione della traslazione del CM e di una rotazione intorno al CM

$$\vec{v}_{P'} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P'}$$

dove $\mathbf{r}_{P'}$ è il raggio vettore che congiunge il CM al punto P'