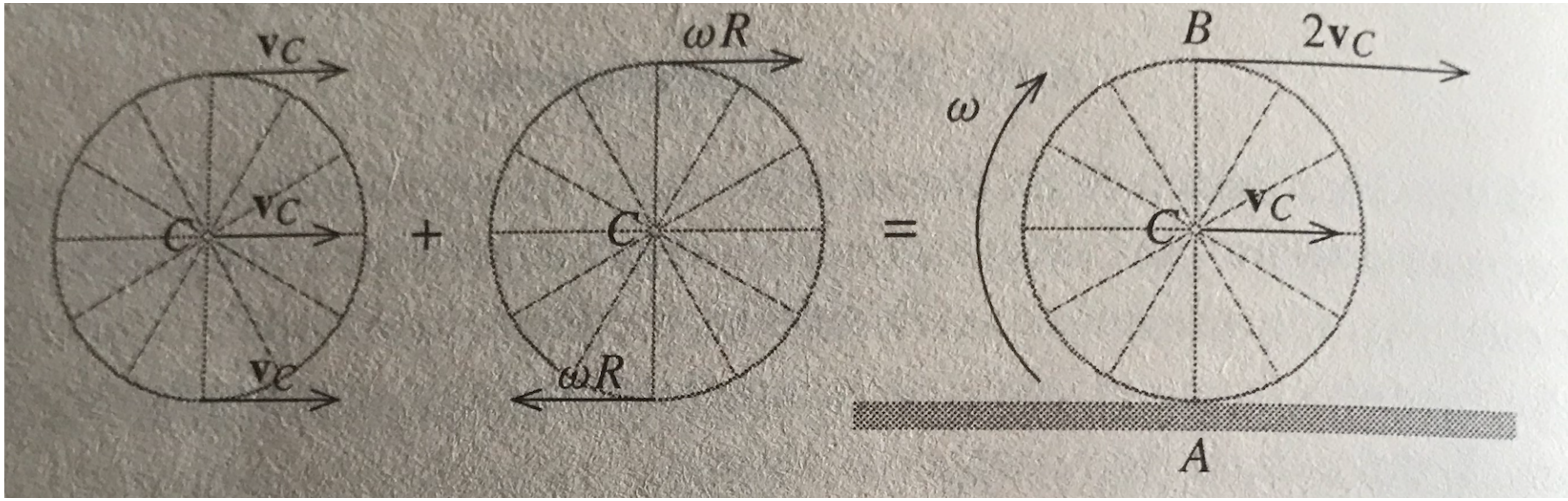
Moto di puro rotolamento

Si parla di moto di puro rotolamento quando un corpo rigido (ruota) rotola senza strisciare.

In tal caso la velocità del punto di contatto della ruota con il piano su cui appoggia è in ogni istante zero, cioè il punto di contatto è fermo.

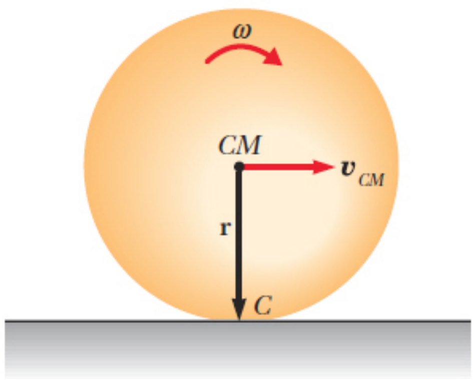
Il moto di puro rotolamento può esserer descritto equivalentemente come:

- combinazione di una traslazione con la velocità del CM e una rotazione con velocità angolare ω attorno all'asse della ruota (T+R)
- una rotazione con la stessa velocità angolare ω attorno all'asse istantaneo di rotazione che è parallelo all'asse della ruota e passa nel punto in cui la ruota tocca il piano di appoggio. (RI)



Traslazione + Rotazione intorno ad asse in C = Rotazione intorno ad asse in A

La velocità del punto di contatto e la velocità del CM sono legate dalla equazione di trasformazione delle velocità nel moto relativo

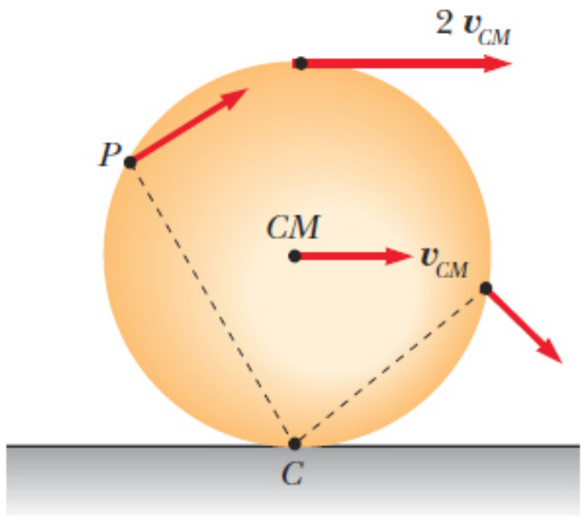


$$\vec{v}_C = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Se il moto è di puro rotolamento $\mathbf{v}_C$=0

$$0 = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

La condizione di puro rotolamento è quindi $v_c + \omega r = 0$



Velocità dei punti di un corpo nel moto di puro rotolamento

La velocità di un generico punto della ruota è data da

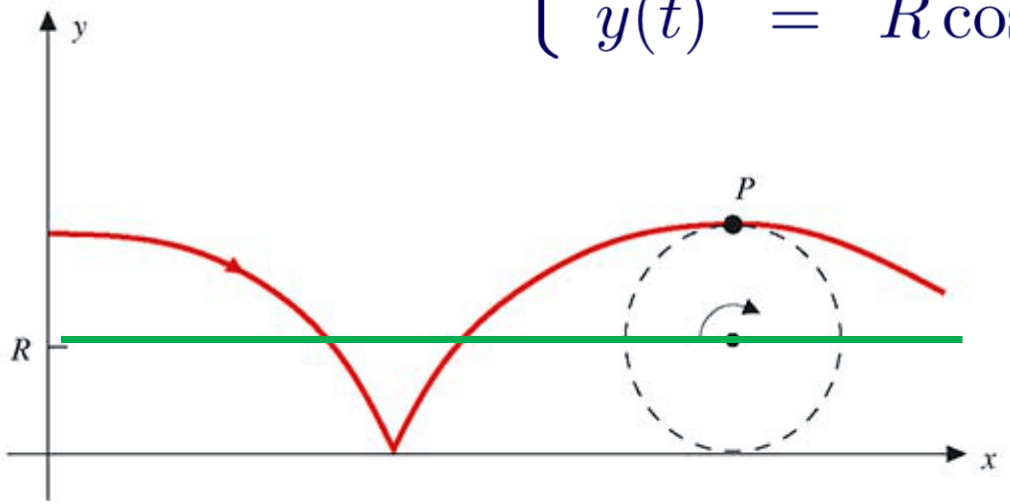
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP}$$

ed è quindi perpendicolare al vettore **CP**

Cicloide

La legge oraria di un punto P della superficie esterna della ruota nel caso di rotolamento puro e assumendo x(0) = 0 y(0) = 2R, è

$$\begin{cases} x(t) &= R\sin(\omega t) + \omega R t \\ y(t) &= R\cos(\omega t) + R \end{cases}$$



La traiettoria di P è una cicloide (linea rossa)
La traiettoria del CM è una retta (linea verde)

$$\begin{cases} v_x(t) &= R\omega\cos(\omega t) + \omega R \\ v_y(t) &= -R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

Velocità di P in funzione del tempo

Il punto di contatto con il piano di appoggio ha coordinate y=0.

Il punto P passa per y=0 al tempo $t^* = \pi/\omega$

La velocità di P al tempo t* è $v_x=v_y=0$ cioè il punto P è fermo quando si trova a contatto con il piano di appoggio, che è proprio la condizione di rotolamento puro

Energia e lavoro nel moto di puro rotolamento

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Energia cinetica considerando il moto come T+R (intorno a CM)

$$E_k = \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Energia cinetica considerando il moto come RI intorno a C

$$I_C = I_{cm} + Mr^2$$

Teorema di Huygens-Steiner

$$v_{cm} = -\omega r$$

Rotolamento puro

$$E_k = \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

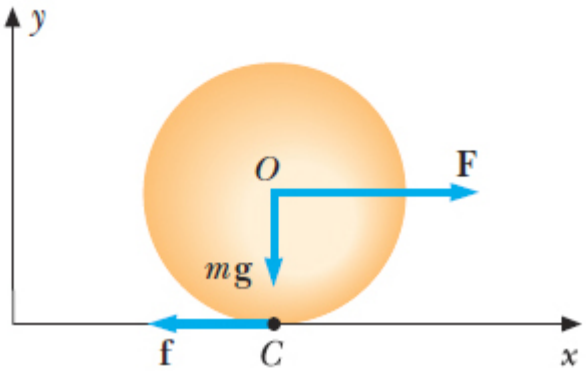
L'energia cinetica è la stessa nei due casi.
Le descrizioni R+T e RI sono equivalenti

Il moto di puro rotolamento richiede la presenza di attrito nel punto di contatto, per tenerlo fermo.

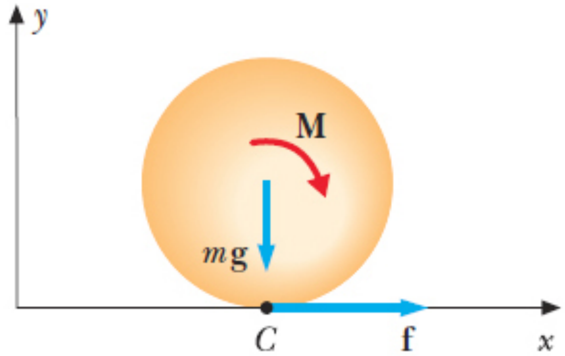
Tuttavia l'attrito non fa lavoro perché il punto C di contatto è fermo.

Per lo stesso motivo, l'attrito è solo statico. Solo se il corpo oltre a ruotare striscia è presente attrito dinamico e dissipazione di energia.

Moto di puro rotolamento



Corpo trascinato
da forza costante



Corpo soggetto a momento
delle forze costante

Equazioni del moto

$$ma_{cm} = F - f$$
$$I\dot{\omega} = -fr$$

$$ma_{cm} = f$$
$$I\dot{\omega} = fr - M$$

- L'equazione della rotazione è scritta scegliendo il CM come polo.
- Il momento di inerzia I è quindi calcolato rispetto all'asse del cilindro.
- Il momento della forza peso è nullo, in quanto la forza peso è applicata nel polo.
- La forza di attrito **f** si oppone al moto nel caso di forza **F** applicata (disegno a sinistra)
- Se invece alla ruota è applicato un momento delle forze costante **M**, è la forza di attrito **f** nel punto di contatto che determina il moto in avanti della ruota (disegno a destra)

Condizione di puro rotolamento

$$v_{cm} = -\omega r$$

$$a_{cm} = -\dot{\omega} r$$

Sostituendo questa condizione nelle equazioni del moto si ottinene **a**$_{cm}$ e **f**

$$m a_{cm} = F + \frac{I\dot{\omega}}{r} = F - \frac{I}{r^2} a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{F}{m + \frac{I}{r^2}}$$

$$f = m a_{cm} - F = \frac{IF}{mr^2 + I}$$

$$a_{cm} = \frac{f}{m} = \frac{I\dot{\omega} + M}{mr} = -\frac{I a_{cm}}{mr^2} + \frac{M}{mr}$$

$$a_{cm} = \frac{M}{mr + \frac{I}{r}}$$

$$f = m a_{cm} = \frac{M}{r + \frac{I}{mr}}$$

La forza di attrito non può superare la forza di attrito statico massima

$$f \leq N\mu_s = mg\mu_s$$

$$F \leq mg\mu_s \left(\frac{mr^2}{I} + 1 \right)$$

$$f \leq N\mu_s = mg\mu_s$$

$$M \leq mg\mu_s r \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)$$

Se **F** o **M** applicati superano il valore limite calcolato, il moto non può essere di puro rotolamento

Esercizio Al tempo t=0 un cilindro di raggio *r* e massa *m* trasla con velocità v_0 orizzontale strisciando senza ruotare su di un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito μ_d). A partire da quale istante il moto diventa di rotolamento puro?

Per t>0 il moto del cilindro è rototraslatorio in quanto è soggetto alla forza di attrito, applicata nel punto di contatto con il piano, che esercita un momento rispetto all'asse del cilindro.
Le equazioni che descrivono la traslazione e la rotazione del cilindro sono

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$N = mg$$

$$ma_{cm} = -N\mu_d = -mg\mu_d$$

$$a_{cm} = -g\mu_d$$

$$v_{cm}(t) = v_0 - g\mu_d t$$

$$I\dot{\omega} = -Nr = -mg\mu_d r$$

$$\dot{\omega} = -\frac{mgr\mu_d}{I}$$

$$\omega(t) = -\frac{mgr\mu_d}{I}t = -\frac{2g\mu_d}{r}t$$

Il segno di ω indica che la rotaziona avviene in verso orario. Durante la rototraslazione non c'e' relazione tra v_{cm} e ω.
La velocità dei punti del cilindro a contatto con il piano di appoggio è $v_P = v_{cm} + \omega r$
Il puro rotolamento si ha quando $v_P = 0$ e tale condizione permette di ricavare il tempo t* da cui inizia il rotolamento puro. Per t>t* il cilindro ruota senza strisciare con velocità angolare ω(t*).

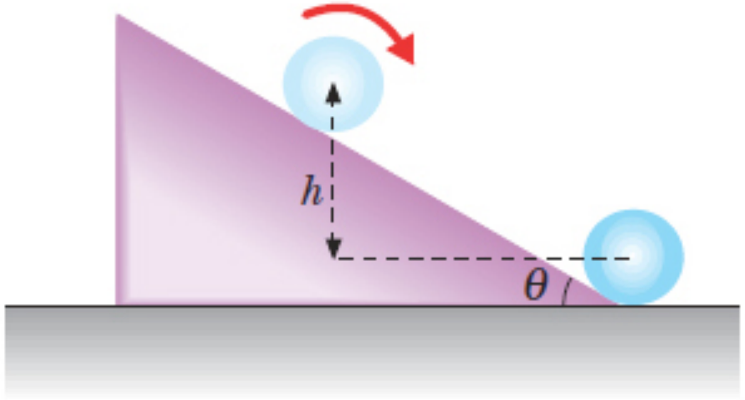
$$v_{cm}(t^*) + r\omega(t^*) = 0$$

$$v_0 - g\mu_d t^* - 2g\mu_d t^* = 0$$

$$t^* = \frac{v_0}{3g\mu_d}$$

$$\omega(t^*) = -\frac{2}{3}\frac{v_0}{r}$$

Corpo rigido che rotola senza strisciare su di un piano inclinato



L'energia meccanica si conserva perché, anche se c'è attrito (necessario per il rotolamento puro), il punto di contatto del corpo rigido con il piano inclinato è, in ogni istante della discesa, fermo.
La condizione di puro rotolamento è quindi

$$v_c + \omega r = 0 \qquad v_c = -\omega r$$

$$E = Mg(h+r) = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg(y+r)$$ Conservazione dell'energia meccanica

$$Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{r^2}\right)v_c^2 + Mgy$$ Sostituendo nella precedente la condizione di puro rotolamento

$$v_c = \sqrt{\frac{2g(h-y)}{(1+\frac{I}{Mr^2})}}$$ Velocità del corpo alla quota y

Cilindro cavo $I = Mr^2$ $v_c = \sqrt{g(h-y)}$

Cilindro pieno $I = \frac{1}{2}Mr^2$ $v_c = \sqrt{\frac{4g(h-y)}{3}}$

Sfera $I = \frac{2}{5}Mr^2$ $v_c = \sqrt{\frac{10g(h-y)}{7}}$

Per ogni tipo di corpo rigido la velocità del CM è minore della velocità raggiunta alla quota *h* da un punto materiale

$$v_c < \sqrt{2g(h-y)}$$

perché una parte dell'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di rotazione oltre che in energia cinetica del CM

Ricaviamo l'accelerazione del CM del corpo derivando l'equazione di conservazione dell'energia

$$v_c a_c \left(M + \frac{I}{r^2}\right) + Mg\dot{y} = 0$$

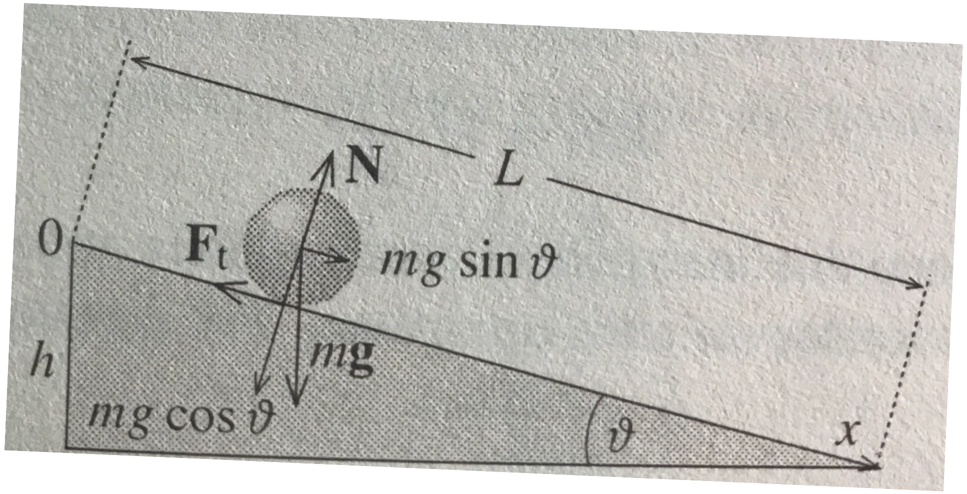
$$y = h - L\sin\theta \qquad \rightarrow \qquad \dot{y} = -v_c \sin\theta$$

Relazione tra la velocità lungo y del corpo e la velocità del CM lungo il piano inclinato

$$v_c a_c \left(M + \frac{I}{r^2}\right) - Mgv_c \sin\theta = 0$$

$$a_c = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)}$$

Accelerazione del CM lungo il piano inclinato.
Nel caso I=0 si ritrova il risultato del punto materiale



Alla stessa soluzione si può arrivare impostando le equazioni della dinamica

$$\begin{cases} M a_c = M g \sin\theta - F_a \\ I\dot{\omega} = -F_a r \end{cases}$$

Moto di traslazione del CM lungo il piano inclinato

Moto di rotazione intorno all'asse del cilindro

Derivando la condizione di rotolamento puro si ottiene la relazione che lega l'accelerazione del CM all'accelerazione angolare e sostituendo nelle due equazioni del moto si ricava

$$a_c = -\dot{\omega} r$$

$$M a_c = M g \sin\theta + \frac{I\dot{\omega}}{r} = M g \sin\theta - \frac{I a_c}{r^2}$$

$$a_c = \frac{g \sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{M r^2}\right)}$$

La condizione di puro rotolamento si ha fino a che la forza di attrito F_a è minore della forza di attrito statico massima

$$F_a = Mg\sin\theta - Ma_c = -\frac{MgI\sin\theta}{(Mr^2+I)}$$ Forza di attrito statico

$$N = Mg\cos\theta$$ Reazione normale al piano inclinato

$$F_a \leq N\mu_s$$

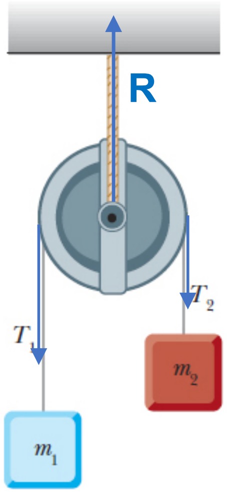
$$\frac{MgI\sin\theta}{(Mr^2+I)} \leq \mu_s Mg\cos\theta$$

$$\tan\theta \leq \frac{\mu_s\left(Mr^2+I\right)}{I}$$

Se la pendenza del piano inclinato non soddisfa questa disuguaglianza il moto di rotolamento puro non è possibile e il corpo rigido rotola e striscia contemporaneamente.

Masse appese a CARRUCOLA considerata come corpo rigido

Due masse ($m_1 > m_2$) sono collegate tramite un filo inestensibile di massa trascurabile che scorre senza slittare su una carrucola cilindrica di massa m e raggio r, che può ruotare intorno al suo asse. Determinare le accelerazioni delle masse, la reazione vincolare sulla carrucola



$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T_1 \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T_2 \\ rT_1 - rT_2 &= I\dot{\omega} \end{aligned}\right\}$$ Equazioni del moto per le due masse e la carrucola

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$ Momento di inerzia di un cilindro rispetto all'asse del cilindro

$$v_1 = \omega r$$

$$v_2 = -\omega r$$

$$a_1 = \dot{\omega}\, r = -a_2$$

Poiché il filo è inestensibile e il filo scorre senza slittare sulla carrucola, la velocità delle masse è uguale in modulo alla velocità dei punti della superficie del cilindro

$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T_1 \\ -m_2 a_1 &= m_2 g - T_2 \end{aligned}\right\}$$

$$(m_1 + m_2) a_1 = (m_1 - m_2) g + T_2 - T_1$$ Sottraendo la seconda equazione dalla prima

$$(m_1 + m_2) a_1 = (m_1 - m_2) g - \frac{I}{r}\dot{\omega}$$

$$(m_1 + m_2) a_1 = (m_1 - m_2) g - \frac{I a_1}{r^2}$$

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m}$$

Si può arrivare allo stesso risultato applicando la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - m_1gz_1 - m_2gz_2 = \text{cost}$$

Le coordinate z si riferiscono al centro della carrucola (z=0)

$$m_1v_1a_1 + m_2v_2a_2 + I\omega\dot{\omega} - m_1gv_1 - m_2gv_2 = 0$$

$$m_1v_1a_1 + m_2(-v_1)(-a_1) + I\frac{v_1}{r}\frac{a_1}{r} - m_1gv_1 - m_2g(-v_1) = 0$$

Si ottiene differenziando l'equazione precedente

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right)a_1 = (m_1 - m_2)g$$

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

Sommando le due equazione del moto per le masse, si ottiene la somma delle tensioni, che è uguale e opposta alla reazione esercitata sul cilindro dall'asta parallela al suo asse intorno a cui ruota.

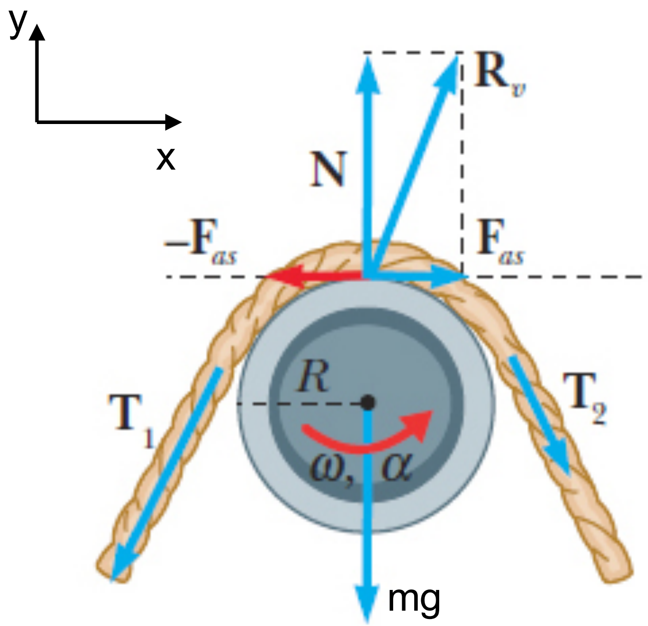
$$T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g + (m_2 - m_1)a_1$$

$$T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g + (m_2 - m_1)\frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 + \frac{1}{2}mm_1 + \frac{1}{2}mm_2)g - (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{[8m_1m_2 + m(m_1 + m_2)]\, g}{2m_1 + 2m_2 + m}$$

$R = -(T_1 + T_2)$ $- mg$ Reazione vincolare dell'asse della carrucola



Se la carrucola è approssimata ad un punto materiale di massa trascurabile (problemi di dinamica senza corpi rigidi) → $T_1 = T_2$

Se la carrucola è un corpo rigido di massa m → $T_1 \neq T_2$
La condizione che il filo "scorre senza slittare" significa che c'è attrito fra filo e carrucola. La situaione è analoga al puro rotolamento. L'attrito statico impedisce lo slittamento del filo.
La reazione uguale e contraria alla forza di attrito statico sulla carrucola la fa ruotare.

$$F_{as} = T_{2x} - T_{1x}$$

$$N = -T_{2y} - T_{1y} - mg$$

$$I\,\alpha = -F_{as} = R\,(T_{1x} - T_{2x})$$