Esercizi su interazione radiazione-materia, rivelatori, acceleratori

Es. 1. Protoni di energia E=16 GeV attraversano uno spessore di 2.5 cm di aria (ρ=0.0012 g/cm^3, Z/A=1/2; I=100 eV).

a) Calcolare la perdita di energia dei protoni.

b) Stimare quante coppie di ioni sono prodotte da tali protoni in 2.5 cm aria.

c) Quante coppie di ioni sono prodotte da particelle α con lo stesso $\beta\gamma$ dei protoni?

Es. 2- Particle ID con Cherenkov. Calcolare l'indice di rifrazione di un radiatore necessario per separare tramite effetto Cherenkov elettroni e muoni di momento 1 GeV/c. (m_e = 511 keV/c^2, m_μ=105 MeV/c^2)

Es. 3- Misura del tempo di volo di una particella.

Si possono identificare due particella di massa m_1 e m_2, aventi lo stesso momento p, misurando il tempo di volo che esse impiegano a percorrere una certa distanza.

Due rivelatori a scintillazione sono posti a distanza L e letti da fototubi. Quando una particella attraversa entrambi gli scintillatori, i segnali all'uscita dei fototubi sono analizzati da un circuito elettronico che permette di misurarne il ritardo temporale.

Calcolare il tempo impiegato dai due tipi di particelle a percorrere L.

Calcolare la differenza Δt fra i tempi di percorrenza e mostrare come si semplifica nel limite $p \gg m_1$, m_2 .

Es. 4- Un sistema TOF è costituito da due scintillatori posti a distanza L. Se la risoluzione temporale del sistema è σ_t = 0.2 ns, calcolare la minima distanza L per discriminare p da K in un fascio di momento 1 GeV/c. E per separare π da K? (M_K = 500 MeV/c^2, m_π = 140 MeV/c^2, m_p=938 MeV/c^2)

Es. 5- Un rivelatore è costituito da un sistema TOF composto di due scintillatori posti a distanza L=1.2 m, e una tracciatore a microstrip di silicio, di spessore 300 μm, immerso in campo magnetico uniforme e costante B=0.8 T.

Una particella attraversa il rivelatore e sono compiute tre misure:

- il tempo di volo misurato è 4.40 ± 0.12 ns
- il raggio di curvatura della traccia ricostruita è R= (1.16 ± 0.001) m
- il numero medio di coppier e-h misurate in ogni microstrip di Si è 4×10^4

Calcolare velocità, impulso, carica e massa della particella con i relativi errori di misura.

(per il Si: w=3.6 eV, ρ = 2.33 g/cm^3, $(dE/dx)_{min}$ = 1.6 MeV cm^2 g^{-1})

Es. 6- Moderazione dei neutroni. I neutroni prodotti nei reattori nucleari sono emessi con energie di pochi MeV e sono rallentati fino a energie termiche nei processi di urto elastico sui nuclei di un mezzo moderatore. Calcolare la variazione della velocità media dei neutroni in ogni urto considerando tre possibili moderatori: H, C, Fe.

Calcolare quanti urti in media sono necessari con ciascun moderatore per rendere termici i neutroni.

Es. 7- Sciami e.m. Calcolare il numero medio di particelle in uno sciame iniziato da un fotone di 50 GeV, dopo 5, e 10 cm di Pb. Calcolare inoltre il massimo dello sviluppo longitudinale dello sciame. Qual è la risoluzione intrinseca del calorimetro ? (Pb X_0 = 6.37 g cm^{-2}, densità ρ = 11.35 g cm^{-3})

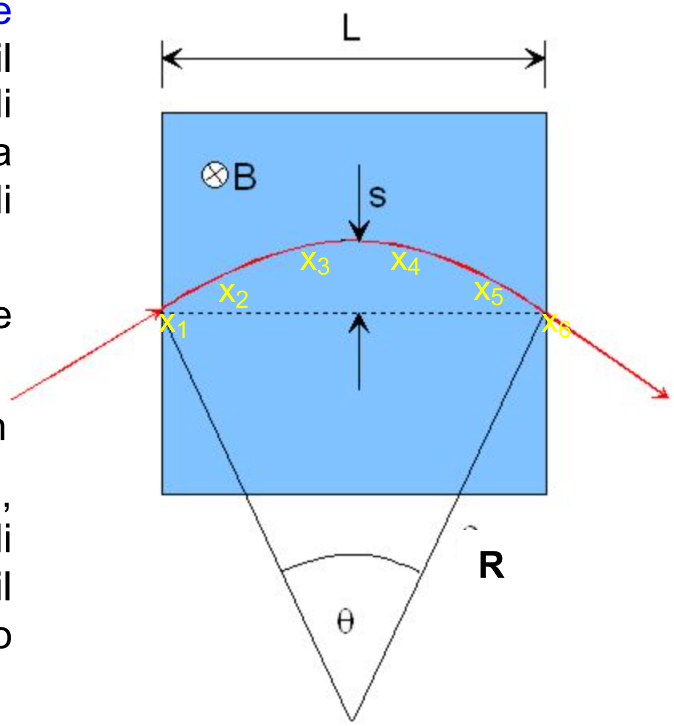
Es. 8- Calculare l'angolo quadratico medio di diffusione dovuto allo scattering multiplo coulombiano per protoni di momento 50 MeV/c in 0.2 g cm^{-2} di alluminio e 0.01 mm di tungsteno.

Es. 9- Misura del momento di una particella con un tracciatore immerso in un campo magnetico. Sia L il lato del tracciatore, B il campo magnetico uniforme e costante perpendicola, R il raggio di curvatura della traiettoria e *s* la *sagitta*. Sia p_T il momento della particella in un piano ortogonale a B. Assumiamo che dalle misure di posizione (x_i) del tracciatore, sia stata determinata la *sagitta s*.

a) Trovare la relazione che lega p_T e *sagitta* e determinare l'errore sulla misura di Δp in funzione dell'errore di misura Δs

b) Calcolare il momento se L= 1 m, B= 0.4 T, s=1 cm e Δs =200 μm

c) Assumendo che la particella sia un pione di massa 140 MeV/c^2, stimare l'impatto del Coulomb multiple scattering sull'errore di misura del momento, schematizzando semplicisticamente il tracciatore come fatto di un materiale omogeneo e considerando due casi distinti: aria, alluminio.



Es. 10 - Un ciclotrone di raggio R=53 cm lavora ad una frequenza di 12 MHz. Qual è l'intensità di B necessaria per accelerare nuclei di deuterio? Qual è la massima energia cinetica acquistata dai nuclei?

Es. 11 - Nell'anello di collisione protone-antiprotone del CERN si fanno circolare protoni di impulso 300 GeV/c. L'anello ha raggio 1 km, e la camera a vuoto contiene aria (azoto, densità 1.25×10^{-3} g/cm^3 a STP) a pressione 10^{-11} atm.

Calcolare:

a) il campo magnetico dell'anello

b) periodo di rivoluzione dei protoni

c) il coefficiente di assorbimento dei protoni se la sezione d'urto di interazione con i nuclei di gas è 300 mb

d) la vita media del fascio cioè l'intervallo di tempo in cui l'intensità del fascio si riduce al valore 1/e di quella iniziale.

Es. 12 - Il muone è una particella instabile di massa 105 MeV/c^2 e vita media 2.2×10^{-6} s. Un fascio di muoni viene fatto circolare in un anello di raggio R=14 m con un campo magnetico uniforme B=0.5 T normale al piano dell'anello. Calcolare l'impulso dei muoni, il periodo di rivoluzione e la frazione di muoni che decadono in un periodo.

Es. 1. Protoni di energia E=16 GeV attraversano uno spessore di 2.5 cm di aria (ρ=0.0012 g/cm^3, Z/A=1/2; I=100 eV).

a) Calcolare la perdita di energia dei protoni.

b) Stimare quante coppie di ioni sono prodotte da tali protoni in 2.5 cm aria.

c) Quante coppie di ioni sono prodotte da particelle α con lo stesso $\beta\gamma$ dei protoni?

Soluzione

Applichiamo la formula di Bethe-Block

$$-\frac{dE}{\rho\, dx} = 0.1535 \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e\beta^2\gamma^2c^2}{I}\right)^2 - 2\beta^2\right] \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

dove abbiamo ignorato le correzioni per effetto densità e di shell.

Calcoliamo β e γ dei protoni

$$\gamma = \frac{E}{m_p c^2} = \frac{16}{0.938} = 17.06$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.998$$

Sostituendo i valori numerici si trova

$$-\frac{dE}{\rho\, dx} = 0.1535 \times 0.5 \times \frac{1}{0.998^2}\left[2\ln\left(\frac{2\times 0.511 \times 0.998^2 \times 17.06^2}{10^{-4}}\right) - 2\times 0.998^2\right] = 2.04 \;\; \text{MeV cm}^2 \;\; \text{g}^{-1}$$

Valore molto vicino al minimo di ionizzazione (~2 MeV cm^2 g^{-1}).

L'energia persa in 2.5 cm di aria è quindi

$$\Delta E = \left(\frac{dE}{\rho\, dx}\right) \times \Delta x \times \rho = 2.04 \times 2.5 \times 1.2 \times 10^{-3} \; = \; 6.12 \text{ keV}$$

b) Per creare una coppia ione-elettrone in aria occorre un'energia w=30 eV.

Quindi il numero di coppie create dal passaggio di un protone è

$$N_{coppie} = \frac{\Delta E}{w} = \frac{6.12 \text{ keV}}{30\,\text{eV}} \; = 204$$

c) Particella α con lo stesso $\beta\gamma$ del protone ha

$$\left(\frac{dE}{\rho\, dx}\right)_\alpha = \left(\frac{z_\alpha}{z_p}\right)^2 \left(\frac{dE}{\rho\, dx}\right)_p = 4 \times 2.04 = 8.16 \text{ MeV cm}^2 \, \text{g}^{-1}$$

quindi perde 4 volte l'energia persa dal protone

$$\Delta E_\alpha = 4 \times 6.12 \text{ keV} = 24.48 \text{ keV}$$

producendo

$$N_{coppie} = \frac{\Delta E_\alpha}{w} = \frac{24.48 \text{ keV}}{30\,\text{eV}} = 816$$

Es. 2- Particle ID con Cherenkov. Calcolare l'indice di rifrazione di un radiatore necessario per separare tramite effetto Cherenkov elettroni e muoni di momento 1 GeV/c. (m_e = 511 keV/c^2, m_μ=105 MeV/c^2)

Soluzione

Una particella emette fotoni Cherenkov quando vale la condizione

$$\beta > \beta_{thr} = \frac{1}{n}$$

che può essere riscritta in termini del momento come

$$p > p_{thr} = m\,\beta_{thr}\,\gamma_{thr}c = \frac{mc}{\sqrt{n^2-1}}$$

Fissato il momento della particella, questa ultima relazione implica che, per emettere fotoni, la particella deve avere una massa tale da soddisfare la condizione

$$mc^2 < pc\sqrt{n^2-1}$$

Se si vuole costruire un rivelatore in grado di discriminare elettroni da muoni, il radiatore deve essere scelto con indice n tale che gli elettroni facciano effetto Cherenkov mentre i muoni no. Deve valere quindi la relazione

$$m_e c^2 < pc\sqrt{n^2-1} < m_\mu c^2$$

che, quadrando ambo i termini, porta a

$$m_e^2 c^4 < p^2 c^2 \left(n^2 - 1\right) < m_\mu^2 c^4$$

$$\sqrt{\frac{m_e^2 c^4}{p^2 c^2} + 1} < n < \sqrt{\frac{m_\mu^2 c^4}{p^2 c^2} + 1}$$

$$\sqrt{\frac{0.511^2}{1000^2} + 1} \approx 1 < n < \sqrt{\frac{105^2}{1000^2} + 1} = 1.0055$$

Per discriminare elettroni da muoni di 1 GeV/c , occorre un materiale trasparente con indice di rifrazione molto vicino a 1.

Si usano di solito Aerogel che hanno n= 1.0001-1.002

Es. 3- Misura del tempo di volo di una particella.

Si possono identificare due particella di massa m_1 e m_2, aventi lo stesso momento p, misurando il tempo di volo che esse impiegano a percorrere una certa distanza.

Due rivelatori a scintillazione sono posti a distanza L e letti da fototubi. Quando una particella attraversa entrambi gli scintillatori, i segnali all'uscita dei fototubi sono analizzati da un circuito elettronico che permette di misurarne il ritardo temporale.

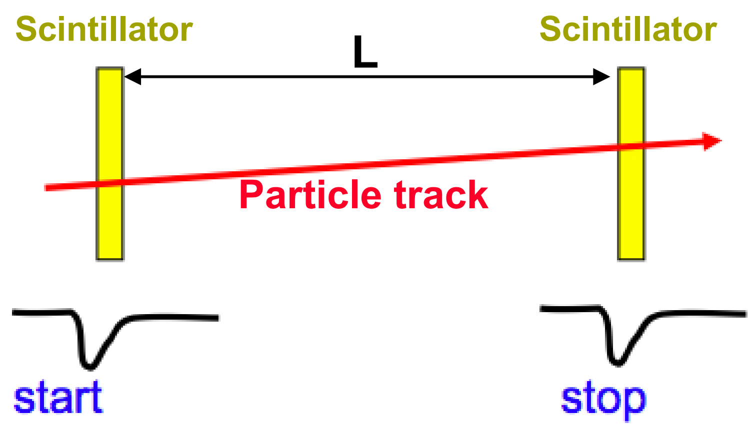
Calcolare il tempo impiegato dai due tipi di particelle a percorrere L.

Calcolare la differenza Δt fra i tempi di percorrenza e mostrare come si semplifica nel limite $p \gg m_1, m_2$.

Soluzione

Le particelle attraversano L con tempi t_i differenti dati da

$$t_i = \frac{L}{c\beta_i} = \frac{L}{c^2 \frac{p}{E_i}} = L\frac{\sqrt{c^2p^2 + m_i^2c^4}}{c^2 p}$$

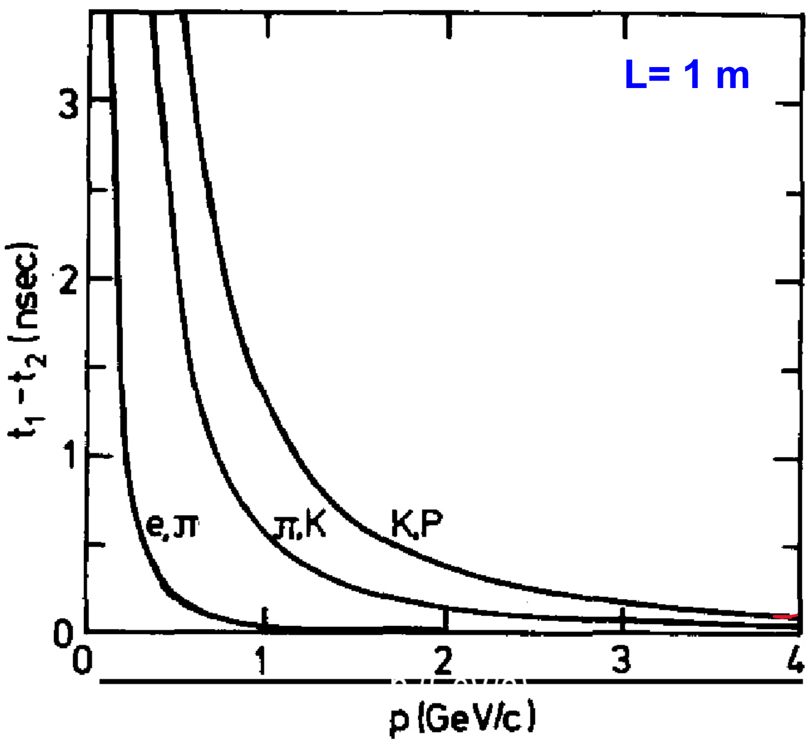


La differenza fra i tempi di percorrenza delle particelle m_1 e m_2 è

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{c}\left(\sqrt{1+\frac{m_2^2 c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1^2 c^2}{p^2}}\right)$$

Se $p >> m_1$ e $p >> m_2$, si possono sviluppare in serie le radici fermandosi al primo ordine. Si ottiene

$$\Delta t \cong L c \frac{\left(m_2^2 - m_1^2\right)}{2p^2}$$



Separazione temporale tra coppie di particelle in funzione dell'impulso per L=1 m

→ TOF dà buona separazione a bassi impulsi

Per fare ciò si deve avere a disposizione un rivelatore con risoluzione temporale σ_{TOF} inferiore a Δt.

Si definisce potere di separazione il rapporto $\dfrac{\Delta t}{\sigma_{TOF}}$

ed esprime quanto sono separate le misure di tempo di volo per due particelle cariche diverse, di uguale impulso, a parità di lunghezza della traiettoria, in base alla risoluzione temporale del rivelatore.

Tipicamente si richiede che il potere di separazione sia >3.

Es. 4- Un sistema TOF è costituito da due scintillatori posti a distanza L. Se la risoluzione temporale del sistema è σ_t = 0.2 ns, calcolare la minima distanza L per discriminare p da K in un fascio di momento 1 GeV/c. E per separare π da K?

(M_K = 500 MeV/c^2, m_π = 140 MeV/c^2, m_p=938 MeV/c^2)

Soluzione

Applichiamo la formula dell'esercizio 3,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{c}\left(\sqrt{1+\frac{m_2^2c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1^2c^2}{p^2}}\right)$$

per ricavare L

$$L = c\Delta t\left(\sqrt{1+\frac{m_2^2c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1^2c^2}{p^2}}\right)^{-1}$$

Per riuscire a separare le due particelle occorre che Δt sia almeno pari a 3 volte la risoluzione temporale dello strumento, quindi $\Delta t = 3 \times \sigma_t$ = 0.6 ns. Pertanto per p K si ha

$$L = c\Delta t\left(\sqrt{1+\frac{m_2^2c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1^2c^2}{p^2}}\right)^{-1} = 3\times 10^8 \times 0.6\times 10^{-9}\left(\sqrt{1+\frac{0.938^2}{1^2}} - \sqrt{1+\frac{0.5^2}{1^2}}\right)^{-1} = 0.7\ \mathrm{m}$$

Quindi la lunghezza minima per discriminare p da K di 1 GeV/c di momento serve una distanza di almeno 0.7 m.

Per separare K da π serve una distanza di

$$L = c\Delta t \left(\sqrt{1+\frac{m_2^2 c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1^2 c^2}{p^2}} \right)^{-1} = 3\times 10^{8} \times 0.6 \times 10^{-9} \left(\sqrt{1+\frac{0.5^2}{1^2}} - \sqrt{1+\frac{0.14^2}{1^2}} \right)^{-1} = 1.6 \text{ m}$$

Es. 5- Un rivelatore è costituito da un sistema TOF composto di due scintillatori posti a distanza L=1.2 m, e una tracciatore a microstrip di silicio, di spessore 300 μm, immerso in campo magnetico uniforme e costante B=0.8 T.

Una particella attraversa il rivelatore e sono compiute tre misure:

- il tempo di volo misurato è 4.40 ± 0.12 ns
- il raggio di curvatura della traccia ricostruita è R= (1.16 ± 0.001) m
- il numero medio di coppie e-h misurate in ogni microstrip di Si è 4×10^4

Calcolare velocità, impulso, carica e massa della particella con i relativi errori di misura.

(per il Si: w=3.6 eV, ρ = 2.33 g/cm^3, $(dE/dx)_{min}$ = 1.6 MeV cm^2 g^{-1})

Soluzione

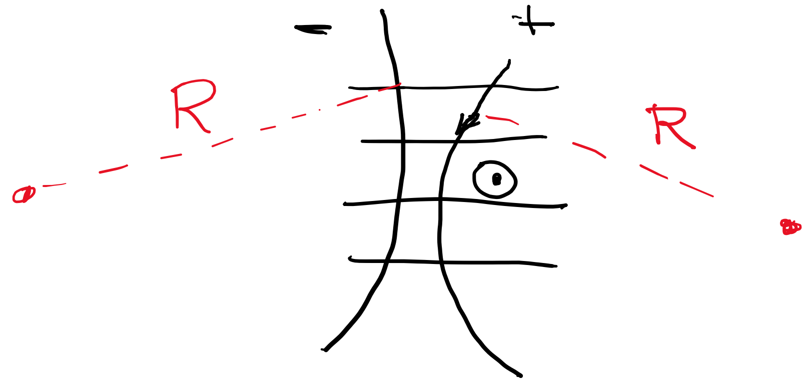
La misura di TOF permette di misurare il β della particella $\beta = \dfrac{L}{cT} = \dfrac{1.2}{3\times10^8 \times 4.4 \times 10^{-9}} = 0.91$

L'errore su β è dato dalla propagazione dell'errore di T

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{0.12}{4.40} = 0.0273$$

$$\Delta\beta = 0.0273 \times 0.91 = 0.025$$

$$\beta = (0.91 \pm 0.02)$$



Dal segnale misurato dalle microstrip si può ricavare il valore medio di dE/dx della particella

$$\Delta E = N_{eh} w = 4 \times 10^4 \times 3.6 = 432 \ \text{keV}$$

$$\frac{\Delta E}{\rho \Delta x} = \frac{432 \text{ keV}}{2.33 g \, \text{cm}^{-3} \times 3 \times 10^{-2} \text{cm}} = 2.06 \text{ MeV cm}^2 \text{g}^{-1}$$

La particella ha β=0.91 e quindi si trova “prima” del minimo di ionizzazione (β_{min}=0.96). Ci si aspetta pertanto che il dE/dx misurato (2.06 MeV cm^2 g^{-1}) sia maggiore del $(dE/dx)_{min}$ al minimo di ionizzazione per il silicio (1.6 MeV cm^2 g^{-1}); è comunque compatibile con una carica unitaria della particella.

Dalla deflessione nel campo magnetico si può ricavare p, assumendo quindi che la carica della particella sia e.

$$p = eBR$$

$$pc = ceBR = 3. \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19} BR \quad [\text{J}]$$

$$pc = \frac{3 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-10}} BR = 0.3 BR \quad [\text{GeV}]$$

$$\text{pc} = 0.3 \times 0.8 \times 1.16 = 0.306 \ \text{GeV}$$

Calcoliamo l'errore su p propagando l'errore su R

$$\Delta\left(pc\right) = 0.3 B\,\Delta R = 0.3 \times 0.8 \times 0.001 = 0.0003 \quad [\mathrm{GeV}]$$

La massa si può calcolare combinando la misura di momento del tracciatore con la misura di velocità del TOF

$$m = \frac{p}{\beta\gamma} = p\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1} = 0.306\sqrt{\frac{1}{0.91^2} - 1} = 139.4 \quad \mathrm{MeV/c^2}$$

L'errore sulla massa si calcola propagando gli errori su β e p

$$\left(\Delta m\right)^2 = \left(\frac{\partial m}{\partial p}\Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial \beta}\Delta\beta\right)^2$$

$$\left(\Delta m\right)^2 = \left(\Delta p\sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta^2}}\right)^2 + \left(\Delta\beta\, p\frac{1}{\beta^2}\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \gamma^4\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2}}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \gamma^4\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.0003}{0.306}\right)^2 + \frac{1}{\left(1-0.91^2\right)^2}\left(\frac{0.02}{0.91}\right)^2} = 0.128$$

da cui

$$\Delta m = 0.128 \times 139.4 = 18\ \mathrm{MeV/c^2}$$

Quindi la particella ha massa

$$m = \left(139 \pm 18\right)\ \mathrm{MeV/c^2}$$

compatibile entro gli errori con la massa del $\pi^{\pm}$ (139.57 MeV/c^2)

A causa del termine moltiplicativo γ^4, per ridurre l'errore sulla massa occorrerebbe migliorare la precisione di misura di β, che dipende dalla risoluzione temporale del TOF.

Es. 6- Moderazione dei neutroni. I neutroni prodotti nei reattori nucleari sono emessi con energie di pochi MeV e sono rallentati fino a energie termiche nei processi di urto elastico sui nuclei di un mezzo moderatore. Calcolare la variazione della velocità media dei neutroni dopo ogni urto considerando tre possibili moderatori: H, C, Fe.

Calcolare quanti urti sono in media necessari con ciascun moderatore per rendere termici i neutroni.

Soluzione

La massa del neutrone è m_n=939 MeV/c^2, quindi γ = 1/939 ~ 10^{-3} cioè il neutrone è non relativistico. Si può quindi considerare la conservazione di energia e impulso classici nell'urto tra un neutrone e un nucleo di massa Am_n.

Abbiamo già trattato la cinematica classica della diffusione elastica di 2 particelle a pag. 13 Lez. 2. Applicando le formule là trovate, si ottiene

$$E_n = \frac{A^2+1+2A\cos\theta_{CM}}{(A+1)^2}E_0$$

Energia del neutrone dopo l'urto

$$E_N = \frac{2A(1-\cos\theta_{CM})}{(A+1)^2}E_0$$

Energia del nucleo dopo l'urto

dove E_0 è l'energia del neutrone incidente, e θ_{CM} l'angolo di scattering nel SCM.

Scrivendo la prima formula in funzione delle velocità iniziale (v_0) e finale (v’) del neutrone, si ricava

$$v' = \frac{\sqrt{A^2 + 1 + 2A\cos\theta_{CM}}}{(A+1)} v_0$$

Ovviamente la velocità finale dipende dall’angolo di diffusione. Per energie <15 MeV lo scattering dei neutroni si può assumere isotropo nel SCM.

Possiamo così calcolare la velocità media dei neutroni diffusi integrando v’ nell’angolo solido

$$< v' >= \int v_0 \frac{\sqrt{A^2 + 1 + 2A\cos\theta_{CM}}}{(A+1)} \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$< v' >= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} v_0 \frac{\sqrt{A^2 + 1 + 2A\cos\theta_{CM}}}{(A+1)} d(\cos\theta_{CM})$$

$$< v' >= \frac{v_0}{3} \frac{\left(A^2 + 1 + 2A\cos\theta_{CM}\right)^{3/2}}{2A(A+1)} \Bigg|_{-1}^{1} = v_0 \frac{\left(A^2 + 1 + 2A\right)^{3/2}}{6A(A+1)} - v_0 \frac{\left(A^2 + 1 - 2A\right)^{3/2}}{6A(A+1)}$$

$$< v' >= v_0 \frac{(A+1)^3 - (A-1)^3}{6A(A+1)} = v_0 \frac{(A+1)^3 - (A-1)^3}{6A(A+1)} = v_0 \frac{3A^2 + 1}{3A(A+1)}$$

Definendo $v' = \alpha\, v_0$ per i tre moderatori, si ha

$$A = 1 \qquad v' = 0.66\, v_0$$
$$A = 12 \qquad v' = 0.925\, v_0$$
$$A = 56 \qquad v' = 0.982\, v_0$$

quindi la maggiore variazione di velocità del neutrone diffuso si ha con moderatori leggeri.

Consideriamo ora la successione di più urti al fine di moderare neutroni di 1 MeV fino a diventare termici (energia cinetica = 1/40 eV). L'energia dopo ogni urto è

$$E_n^{(0)} = \frac{1}{2} m_n v_0^2 = 1 \text{ MeV}$$
$$E_n^{(1)} = \frac{1}{2} m_n v_1^2 = \frac{1}{2} m_n \left(\alpha v_0\right)^2$$
$$E_n^{(2)} = \frac{1}{2} m_n v_2^2 = \frac{1}{2} m_n \left(\alpha v_1\right)^2 = \frac{1}{2} m_n \left(\alpha^2 v_0\right)^2$$

...

$$E_n^{(k)} = \frac{1}{2} m_n v_k^2 = \frac{1}{2} m_n \left(\alpha^k v_0\right)^2$$

...

$$E_n^{(f)} = \frac{1}{2} m_n v_f^2 = \frac{1}{40} \text{ eV}$$

Il numero di urti *u* necessari per moderare i neutroni si ottiene dalla condizione

$$E_n^{(u)} = E_n^{(f)} = \frac{1}{2} m_n \left(\alpha^u v_0\right)^2 = \frac{1}{2} m_n \alpha^{2u} v_0^2 = \alpha^{2u} E_n^{(0)}$$

$$\alpha^{2u} = \frac{E_f}{E_0}$$

$$u = \frac{\ln\left(\frac{E_n^{(f)}}{E_n^{(0)}}\right)}{2\ln\alpha}$$

Per i tre moderatori si calcola il numero medio di urti

$$H \quad \alpha = 0.66 \qquad u = \frac{\ln\left(\frac{1/40}{10^6}\right)}{2\ln 0.66} = \frac{-\ln 40 - 6\ln 10}{2\ln 0.66} = 21$$

$$C \quad \alpha = 0.925 \qquad u = \frac{\ln\left(\frac{1/40}{10^6}\right)}{2\ln 0.925} = \frac{-\ln 40 - 6\ln 10}{2\ln 0.925} = 112$$

$$\mathrm{Fe} \quad \alpha = 0.982 \qquad u = \frac{\ln\left(\frac{1/40}{10^6}\right)}{2\ln 0.982} = \frac{-\ln 40 - 6\ln 10}{2\ln 0.982} = 481$$

Es. 7- Sciami e.m. Calcolare il numero medio di particelle in uno sciame iniziato da un fotone di 50 GeV, dopo 5 e 10 cm di Pb. Calcolare inoltre il massimo dello sviluppo longitudinale dello sciame. Qual è la risoluzione intrinseca del calorimetro ?

(Pb X_0 = 6.37 g cm^{-2}, densità ρ = 11.35 g cm^{-3})

Soluzione

Dalle tavole di pag. 45 Lez.7, per il Pb si ha

$$\lambda_{\text{pair}} \approx X_0 = \frac{6.37}{11.35} = 0.56 \text{ cm}$$

$$E_c = 6.9 \text{ MeV}$$

Nella semplice schematizzazione dello sciame e.m. illustrata a pag. 37 Lez. 7, il numero di secondari nello sciame e la loro energia dopo uno spessore $t=x/X_0$ è dato da

$$N(t) = 2^t$$

$$E(t) = \frac{E_0}{2^t}$$

Si calcola quindi

$$\text{N(5 cm)} = 2^{5/0.56} = 487$$

$$E(5 \text{ cm}) = \frac{5 \times 10^4}{2^{5/0.56}} = 102 \text{ MeV}$$

$$\text{N(10 cm)} = 2^{10/0.56} = 2.37 \times 10^5$$

$$E(10 \text{ cm}) = \frac{5 \times 10^4}{2^{10/0.56}} = 0.21 \text{ MeV}$$

A 5 cm di profondità, l'energia dei secondari è > $E_{C,}$ quindi il massimo dello sciame non è ancora stato raggiunto e i processi dominanti sono bremmstrahlung e produzione di coppia.

A 10 cm, l'energia dei secondari risulterebbe < $E_{C,}$ il che significa che il massimo dello sciame è già stato raggiunto in precedenza, il processo di moltiplicazione è già finito, e i processi dominanti sono ionizzazione per $e^{\pm}$, Compton e fotoelettrico per γ

Il massimo dello sciame si ha quando l'energia dei secondari = E_C

$$t_{Max} = \frac{\ln \frac{E_0}{E_c}}{\ln 2} = 12.82 = 7.18 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(t_{Max}) = 2^{12.82} = 7231$$

La risoluzione intrinseca del calorimetro è data dalla fluttuazione sulla misura dell'energia.

L'energia si misura dalla total track length cioè dalla somma delle tracce cariche

$$E_{mis} \propto TL = X_0 \frac{E_0}{E_c}$$

$$\Delta E_{mis} \propto X_0 \sqrt{\frac{E_0}{E_c}}$$

$$\frac{\Delta E_{mis}}{E_{mis}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{E_0}{E_c}}} = \sqrt{\frac{6.9}{5 \times 10^4}} = 0.011$$

Es. 8- Calculare l'angolo quadratico medio di diffusione dovuto allo scattering multiplo coulombiano per protoni di momento 50 MeV/c in 0.2 g cm^{-2} di alluminio e 0.01 mm di tungsteno.

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto la velocità β del protone (m_p=938 MeV/c^2)

$$p = m_p \beta\gamma = m_p \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_p^2}} = \frac{10}{\sqrt{50^2 + 938^2}} = 0.053$$

Dalle tavole del PDG (Lez. 7 pag. 45) si legge

Al ρ= 2.7 g/cm^3 X_0=24 g/cm^2

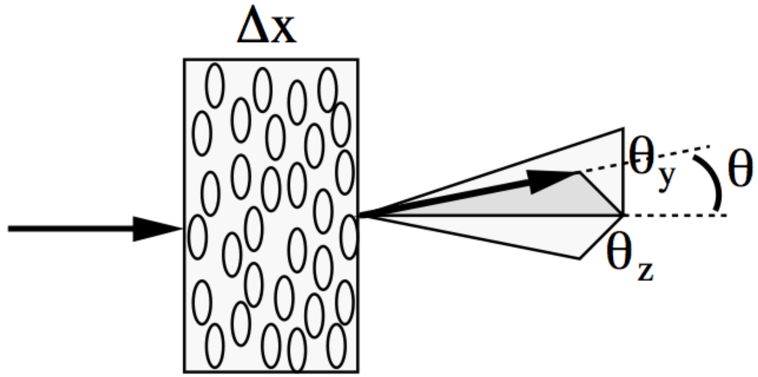
W ρ= 19.3 g/cm^3 X_0=6.76 g/cm^2 = 6.76/19.3 cm = 0.35 cm

L'angolo quadratico medio di scattering nello spazio è

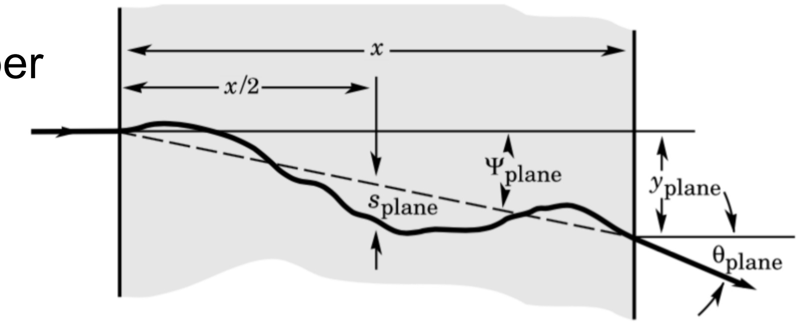
$$\theta_{space}^{rms} = \sqrt{<\theta^2>} = z\frac{21\ \text{MeV}}{p\beta}\sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

$$\mathrm{Al} \quad \theta^{rms}_{space} = \frac{21\ \mathrm{MeV}}{50 \times 0.053}\sqrt{\frac{0.2}{24}} = 0.72 \quad \mathrm{rad}$$

$$W \quad \theta^{rms}_{space} = \frac{21\ \mathrm{MeV}}{50 \times 0.053}\sqrt{\frac{0.001}{0.35}} = 0.42 \quad \mathrm{rad}$$



L'angolo di scattering proiettato su di un piano, per piccole deflesioni, è



$$\left(\theta^{rms}_{space}\right)^2 = <\theta^2>_z + <\theta^2>_y$$

Per l'isotropia del mezzo i valori degli angoli proiettati sono uguali:

$$<\theta^2>_z = <\theta^2>_y = \left(\theta^{rms}_{plane}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\theta^{rms}_{plane}\right)^2 \Rightarrow \theta^{rms}_{plane} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^{rms}_{space}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\mathrm{Al} \quad \theta^{rms}_{plane} = 0.5 \quad \mathrm{rad} = 28.6°$$

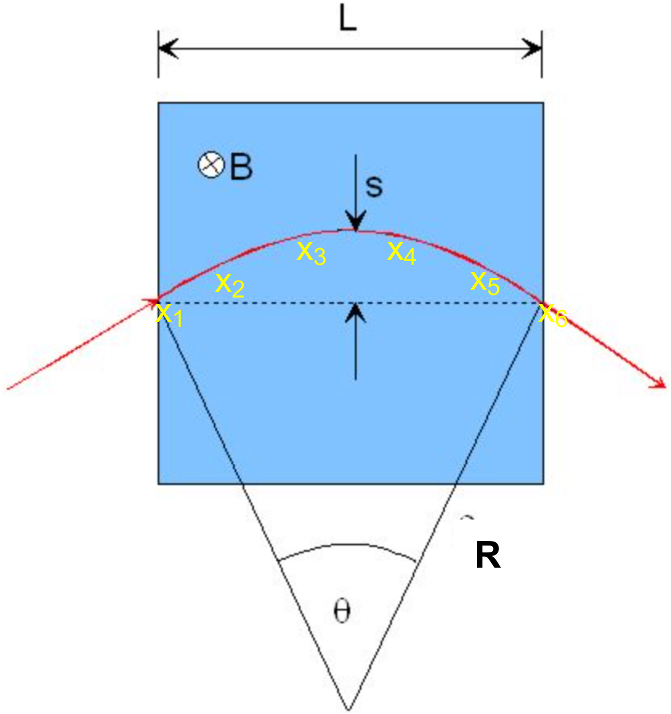
$$W \quad \theta^{rms}_{plane} = 0.3 \quad \mathrm{rad} = 17.1°$$

Es. 9- Misura del momento di una particella con un tracciatore immerso in un campo magnetico. Sia L il lato del tracciatore, B il campo magnetico uniforme e costante perpendicola, R il raggio di curvatura della traiettoria e *s* la *sagitta*. Sia p_T il momento della particella in un piano ortogonale a B. Assumiamo che dalle misure di posizione (x_i) del tracciatore, sia stata determinata la *sagitta s*.

a) Trovare la relazione che lega p_T e *sagitta* e determinare l'errore sulla misura di Δp in funzione dell'errore di misura Δs

b) Calcolare il momento se L= 1 m, B= 0.4 T, s=1 cm e Δs =200 μm

c) Assumendo che la particella sia un pione di massa 140 MeV/c^2, stimare l'impatto del Coulomb multiple scattering sull'errore di misura del momento, schematizzando semplicisticamente il tracciatore come fatto di un materiale omogeneo e considerando due casi distinti: aria, alluminio.



Soluzione

a) Il momento della particella nel piano perpendicolare a B si misura noti B e R, dalla relazione

$$p_T[\mathrm{GeV}] = 0.3\,B[\mathrm{T}]\,R[\mathrm{m}]$$

In questo caso R non è noto, ma si può esprimere in funzione di L e s

$$\frac{L}{2} = R\sin\frac{\theta}{2} \approx R\frac{\theta}{2}$$

$$\theta = \frac{L}{R}$$

$$s = R\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) \approx R\frac{\theta^2}{8} = \frac{L^2}{8R} \Rightarrow R = \frac{L^2}{8s}$$

A questo punto si può esprimere p_T come $\boxed{p_T = 0.3\,B\frac{L^2}{8s}}$

L'errore sul momento misurato è dovuto all'errore di misura della *sagitta*

$$\Delta p_T = 0.3\,B\frac{L^2}{8s^2}\Delta s$$

$$\frac{\Delta p_T}{p_T^2} = \frac{8\Delta s}{0.3\,BL^2}$$

b) Sostituendo i valori numerici nelle espressioni trovate per il momento e il suo errore

$$p_T = 0.3B\frac{L^2}{8s} = 0.3 \times 0.4 \times \frac{1^2}{8 \times 0.01} = 1.5 \ \ \text{GeV/c}$$

$$\Delta p = \frac{8\Delta s}{0.3BL^2} p^2 = \frac{8 \times 2 \cdot 10^{-4}}{0.3 \times 0.4 \times 1^2} \times 1.5^2 = \ 0.03 \text{ GeV/c}$$

quindi $\quad p_T = (1500 \pm 30) \ \ \text{MeV/c}$

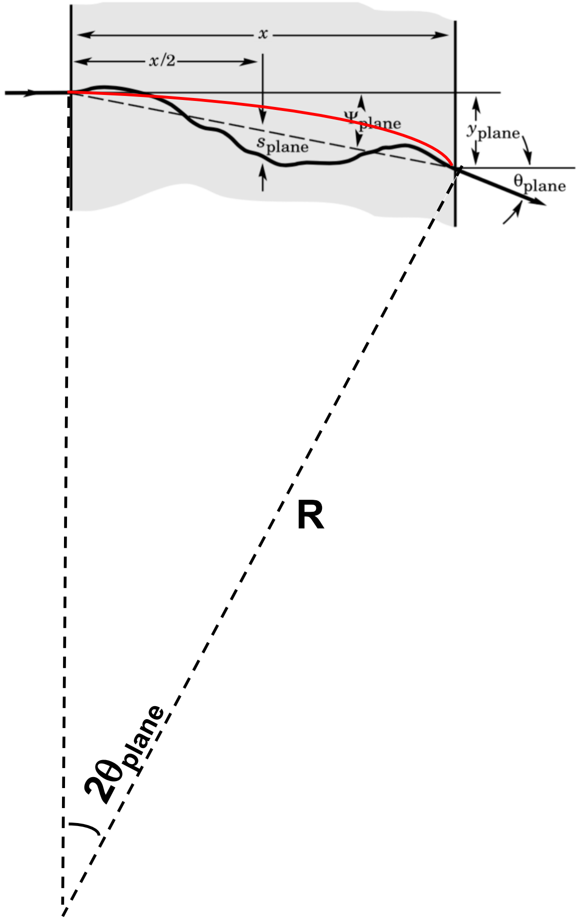
Se la particella è un pione di massa 140 MeV/c^2, la sua velocità risulta

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_\pi^2}} = \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2 + 0.14^2}} = 0.996$$

c) Il multiple scattering (MS) subito dalla particella attraversando il tracciatore, può risultare in una deflessione rispetto alla traiettoria originaria, che determina un errore aggiuntivo sulla misura del momento rispetto a quello calcolato al punto precedente.

L'angolo di uscita dal tracciatore dovuto al MS è

$$\theta_{plane}^{rms} = z\frac{21 \text{ MeV}}{\sqrt{2}p\beta}\sqrt{\frac{L}{X_0}}$$



La deflessione agisce come un'apparente curvatura della traccia (definita come 1/R) con errore

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\theta^{rms}_{plane}}{L} = \frac{21\times10^{-3}}{\sqrt{2}\,p_T[\mathrm{GeV}]\,\beta}\sqrt{\frac{1}{L X_0}}$$

Sfruttando la relazione

$$p_T[\mathrm{GeV}] = 0.3\,B[\mathrm{T}]\,R[\mathrm{m}]$$

$$\frac{1}{R} = \frac{0.3\,B}{p_T}$$

e differenziando, si ottiene inoltre

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{0.3\,B}{p_T^2}\Delta p_T$$

Uguagliando le due espressioni trovate di Δ(1/R), si può stimare l'effetto del MS sulla risoluzione in momento

$$\boxed{\Delta p_T = \frac{21\times10^{-3}\;p_T[\mathrm{GeV}]}{\sqrt{2}\times0.3\,B\,\beta}\sqrt{\frac{1}{L X_0}}}$$

Sostituendo i valori numerici si calcola

$$\Delta p_T[\text{GeV/c}] = \frac{21\times 10^{-3}}{\sqrt{2}\,0.3 B\beta}\frac{1}{\sqrt{L X_0}}\,p_T[\text{GeV}] = \frac{21\times 10^{-3}}{\sqrt{2}\,0.3\times 0.4\times 0.996}\frac{1.5}{\sqrt{X_0[\text{m}]}} = \frac{0.186}{\sqrt{X_0[\text{m}]}}$$

Consideriamo un tracciatore assimilabile ad un materiale omogeneo e valutiamo l’errore sul momento nel caso che il materiale sia aria oppure Al

Aria

$$\rho = 0.0012 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\text{X}_0 = 36.62 \text{ g cm}^{-2} = 36.62 / 0.0012 \text{ cm} = 305 \text{ m}$$

$$\Delta p_T = \frac{0.186}{\sqrt{305}} = 0.0106 \quad \text{GeV/c}$$

Alluminio

$$\rho = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\text{X}_0 = 24 \text{ g cm}^{-2} = 24 / 2.7 \text{ cm} = 8.88 \text{ cm}$$

$$\Delta p_T = \frac{0.186}{\sqrt{0.088}} = 0.623 \quad \text{GeV/c}$$

Notiamo quindi che l'errore sul momento misurato è dato dalla somma in quadratura di due termini, uno legato all'errore sulla misura di posizione del tracciatore e l'altro dovuto al MS

$$\frac{\Delta p_T}{p_T} = \left(\frac{\Delta p_T}{p_T}\right)_{POS} \oplus \left(\frac{\Delta p_T}{p_T}\right)_{MS}$$

$$\left(\frac{\Delta p_T}{p_T}\right)_{POS} = \frac{8\Delta s}{0.3\,BL^2}\,p_T$$

$$\left(\frac{\Delta p_T}{p_T}\right)_{MS} = \frac{21\times10^{-3}}{\sqrt{2}\times0.3\,B\,\beta}\sqrt{\frac{1}{L\,X_0}}$$

Il MS è la fonte principale di errore a bassi valori di momento, mentre il termine POS (essendo lineare in p_T) diventa rilevante ad alti valori momento.

Nel caso del problema abbiamo

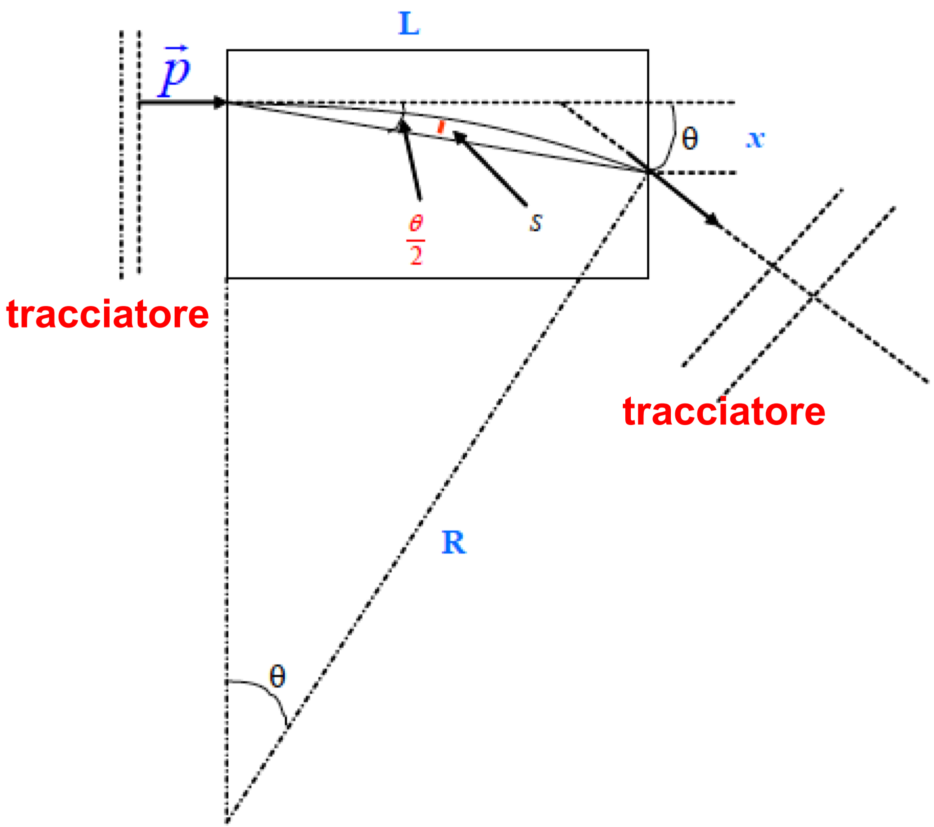
$$\left(\frac{\Delta p_T}{p_T}\right)_{POS} = 2\%$$

$$\left(\frac{\Delta p_T}{p_T}\right)_{MS}^{Air} = \frac{11}{1500} = 0.7\%$$

$$\left(\frac{\Delta p_T}{p_T}\right)_{MS}^{Al} = \frac{623}{1500} = 41.5\%$$

Un altro metodo per la misura dell'impulso è l'analizzatore magnetico, in cui le misure di posizione sono fatte dal tracciatore prima dell'entrata e dopo l'uscita della particella dalla regione di campo magnetico di dimensione L.

Il tracciatore fornisce una misura di x in termini del quale si può esprimere p_T



$$\theta \approx \frac{L}{R}$$

$$x \approx L\frac{\theta}{2}$$

$$p_T = 0.3BR = 0.3B\frac{L}{\theta} = 0.3B\frac{L^2}{2x}$$

$$\Delta p_T = 0.3B\frac{L^2}{2x^2}\Delta x$$

$$\frac{\Delta p_T}{p_T^2} = \frac{2\Delta x}{0.3BL^2}$$

Es. 10 Un ciclotrone di raggio R=53 cm lavora ad una frequenza di 12 MHz. Qual è l'intensità di B necessaria per accelerare nuclei di deuterio? Qual è la massima energia cinetica acquistata dai nuclei?

Soluzione

Il deuterio è isotopo dell'idrogeno con massa = $3.34 \cdot 10^{-27}$ kg.

Per la condizione di risonanza la frequenza dell'oscillatore è uguale alla frequenza del moto circolare uniforme dei nuclei nell'acceleratore.

Dalla formula della frequenza, si ricava:

$$B = \frac{2\pi m \nu}{q} = \frac{2\pi \cdot 3.34 \cdot 10^{-27} \cdot 12 \cdot 10^{6}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \, T = 1.57 \, T$$

L'energia cinetica massima è quella che il nucleo ha lungo la massima circonferenza possibile nella macchina:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{R^2 q^2 B^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{(0.53 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.57)^2}{3.34 \cdot 10^{-27}} = 2.27 \cdot 10^{-12} \, J = 17 \, MeV$$

Es. 11 - Nell'anello di collisione protone-antiprotone del CERN si fanno circolare protoni di impulso 300 GeV/c. L'anello ha raggio 1 km, e la camera a vuoto contiene aria (azoto, densità 1.25×10^{-3} g/cm^3 a STP) a pressione 10^{-11} atm.

Calcolare:

a) il campo magnetico dell'anello

b) periodo di rivoluzione dei protoni

c) il coefficiente di assorbimento dei protoni se la sezione d'urto di interazione con i nuclei di gas è 300 mb

d) la vita media del fascio cioè l'intervallo di tempo in cui l'intensità del fascio si riduce al valore 1/e di quella iniziale.

Soluzione

a)

$$p = 0.3\, B[T]\, R[m] (GeV/c)$$

$$B = \frac{p}{0.3R} = \frac{300}{0.3\, 10^3} = 1\,\mathrm{T}$$

b)

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{\sqrt{p^2+m^2}}{m} = 320$$

$$\omega = \frac{qB}{m\gamma} = \frac{1.6\times 10^{-19}\times 1}{1.67\times 10^{-27}\times 320} = 2.9\times 10^5 \mathrm{s}^{-1}$$

NOTA BENE: per calcolare la frequenza di ciclotrone occorre usare la massa del protone espressa in kg, non in GeV → m = 1.67×10^{-27} kg

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.1\times 10^{-5}\mathrm{s}$$

c) Il coefficiente di assorbimento è dato da $\mu = \rho \frac{N_A}{A}\sigma$

dove σ = 300 mb = 300×10^{-3} $\times10^{-24}$ cm^2 = 3×10^{-25} cm^2

A=14, N_A è il numero di Avogadro 6.02 $\times10^{23}$

ρ_0= 1.25×10^{-3} g/cm^3 è la densità a STP (1 atm, 25 ° C), quindi va calcolata la densità alla pressione del gas nel tubo a vuoto cioè a 10^{-11} atm

$P V = P_0 V_0 = n R T$ dove P = 10^{-11} atm e P_0 = 1 atm

$P\,V = P_0\,V_0 = n\,R\,T$

dove $P = 10^{-11}$ atm e $P_0 = 1$ atm

$V_0 = m/\rho_0$

$V = m/\rho$

$P\,m/\rho = P_0\,m/\rho_0 \rightarrow P/P_0 = \rho/\rho_0 \rightarrow \rho = \rho_0\,P/P_0 = 10^{-11}\,\rho_0$

$$\mu = \rho\frac{N_A}{A}\sigma = \frac{6.02\times10^{23}}{14}\times10^{-11}\times1.25\times10^{-3}\times3\times10^{-25} = 1.6\times10^{-16}\,\mathrm{cm}^{-1}$$

d) $$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\mu x\right)$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{e} \rightarrow \tilde{x} = \frac{1}{\mu} = 6.25\times10^{13}\mathrm{m}$$

Per trovare in quanto tempo l'intensità del fascio si riduce a 1/e, troviamo a quante orbite ~x corrisponde e quindi moltiplichiamo per T

$$\frac{\tilde{x}}{2\pi R} = \frac{6.25\times10^{13}}{2\pi10^3}2.1\times10^{-5} = 2.1\times10^{5}\,\mathrm{s}$$

Es. 12 - Il muone è una particella instabile di massa 105 MeV/c^2 e vita media 2.2×10^{-6} s. Un fascio di muoni viene fatto circolare in un anello di raggio R=14 m con un campo magnetico uniforme B=0.5 T normale al piano dell'anello. Calcolare l'impulso dei muoni, il periodo di rivoluzione e la frazione di muoni che decadono in un periodo.

Soluzione

a) Calcolare l'impulso dei muoni $\quad P = 0.3\ B\ R = 2.1\ \mathrm{GeV}/c$

b) Calcolare il periodo di rivoluzione

$\omega = qB/m\gamma \qquad T = 2\pi/\omega = 2\pi\ m\ \gamma/qB$

$$E/mc^2 = \gamma = (p^2 + m^2)^{0.5}/m = (p^2/m^2 + 1)^{0.5} = 20.02$$

$$T = 2.9 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

c) Calcolare la frazione di muoni che decadono in un periodo

$$N(t) = N_0 \exp[-t/(\gamma\tau)]$$

$$N(t)/N_0 = \exp\,[-2.9\ 10^{-7}/(2.2 \cdot 10^{-6}\ 20.02)]$$

$$1-N(t)/N_0 = 1- \exp(-0.131/20.02) = 1 - \exp(-6.5 \cdot 10^{-3}) \cong 6.5 \cdot 10^{-3}$$