Lezione 7
Interazione radiazione materia

Corso di Fisica nucleare e subnucleare

Paolo Maestro

a.a. 2020/21

Generalità

Radiazione ionizzante: particelle cariche (elettroni, protoni, α) e neutre (fotoni, neutroni) con energie superiori a quache decina di eV

L'interazione radiazione-materia è alla base dei:

- Metodi di rivelazione delle particelle in fisica nucleare e subnucleare
- Dosimetria, radioprotezione.

Si distinguono i seguenti processi a seconda del tipo di particella:

- Interazione di particelle cariche:
  - Perdita di energia per ionizzazione
  - Perdita di energia per radiazione (Cherenkov, radiazione di frenamento)
  - Scattering multiplo.

- Interazione di particelle neutre:
  - Fotoni (effetto fotoelettrico, effetto Compton, produzione di coppie)
  - Neutroni (urti con nuclei elastici e anelastici, processi di cattura)

Interazione di particelle cariche pesanti

Una particella carica pesante (π, μ, p, α, nuclei, esclusi $e^{\pm}$) che si muove in un mezzo materiale perde energia quasi con continuità e viene lievemente deflessa dalla sua direzione iniziale.

Questi due effetti sono il risultato di due tipi di collisioni:

- Collisioni inelastiche con gli elettroni atomici del materiale, in particolare con quelli più esterni; queste collisioni producono ionizzazione e/o eccitazione degli atomi del mezzo e perdita di energia della particella incidente carica.
- Collisioni elastiche nel campo coulombiano dei nuclei. Queste collisioni sono meno frequenti; portano a perdita di energia trascurabile (se $m_{part} << m_{Nucleo}$), ma a variazione della direzione della particella incidente.

La perdita di energia in ogni collisione è una frazione molto piccola dell'energia cinetica della particella incidente. Siccome però il numero delle collisioni per unità di percorso è molto elevato ($\sigma \approx 10^{-16}$-10^{-17} cm^2), ne risulta una perdita di energia cumulata significativa con piccole fluttuazioni.

Si introduce pertanto la perdita di energia media per unità di percorso dE/dx (stopping power, ionization energy loss).

Per particelle veloci, dE/dx ~2 MeV/cm in acqua.

Calcolo classico di dE/dx – Approssimazione di Bohr

Ipotesi:

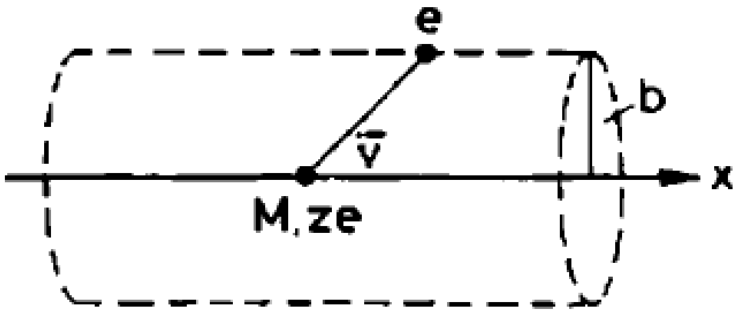
- Atomo con Z elettroni
- Particella incidente ze, M>>m_e ➔ particella non deviata dopo gli urti
- Alta velocità v della particella ➔ gli elettroni orbitali si considerano fermi durante gli urti.

Calcoliamo l'impulso trasferito ad un singolo elettrone durante l'urto, dove per simmetria si considera solo la componente perpendicolare del campo elettrico

$$\Delta q = \int F\,dt = e\int E_\perp\,dt = e\int E_\perp \frac{dt}{dx}dx = e\int E_\perp \frac{dx}{v}$$

Applicando il teorema di Gauss

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = 2\pi b\int E_\perp\,dx = \frac{ze}{\varepsilon_0}$$



si ricava

$$\Delta q = \frac{ze^2}{2\pi b\,\varepsilon_0\,v}$$

Nell'ipotesi che $\Delta q << m_e$ l'energia trasferita all'elettrone è

$$\Delta E = \frac{\Delta q^2}{2m_e} = \frac{z^2 e^4}{8 m_e \pi^2 b^2 \varepsilon_0^2 v^2} = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^4}{b^2 v^2} = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{b^2 \beta^2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del raggio classico dell'elettrone $r_e = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e c^2}$

Si considerano ora tutti gli urti con parametro di impatto compreso fra b e b+db e lunghezza di percorso dx. L'energia persa dalla particella incidente è data da

$$-dE = \Delta E \, n_e \, dV = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{b^2 \beta^2} n_e \, 2\pi b \, db \, dx = \frac{4\pi z^2 r_e^2 m_e c^2 n_e}{b \beta^2} db \, dx$$

dove n_e è il numero di elettroni per unità di volume $n_e = N_A \frac{\rho}{A} Z$

L'energia persa nel tratto dx, si ottiene integrando su tutti i pametri di impatto compresi fra un valore minimo e un massimo

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{4\pi z^2 r_e^2 m_e c^2 N_e}{b \beta^2} db = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Determiniamo i valori estremi del parametro di impatto.

- All'aumentare di b aumenta il tempo di collisione Δt. L'urto deve avvenire in un $\Delta t < T_e$, dove T_e=tempo di rivoluzione dell'elettrone. Se invece $\Delta t > T_e$ non c'e' trasferimento di energia. Ciò pone un limite superiore su b

$$\Delta t = \frac{b}{v\gamma} < T_e = \frac{1}{\bar{\nu}_e} \quad \Rightarrow b_{\max} = \frac{v\gamma}{\bar{\nu}_e}$$

dove ν_e è la frequenza media degli elettroni e il fattore γ di Lorentz è introdotto per tenere conto della dilatazione del tempo.

- Il limite inferiore si determina considerando che b non può essere minore della dimensione dell'elettrone vista dalla particella incidente

$$b_{\min} \approx \lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e \beta \gamma c}$$

Sostituendo questi due valori si ottiene la formula di Bohr (1915)

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \ln\left(\frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right)$$

dove $I = h\bar{\nu}_e$ è il potenziale medio di eccitazione (dipende dal materiale, è dell'ordine di 100 eV).

Formula di Bethe-Block

La formula di Bohr (1915) è un'approssimazione. Il calcolo corretto fu fatto da Bethe-Block (1930) tenendo conto di effetti quantistici che sono rilevanti per protoni e altre particelle leggere.

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \rho \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e\beta^2\gamma^2c^2W_{\max}}{I^2}\right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z}\right]$$

$$2\pi r_e^2 m_e c^2 N_A = 0.1535 \ \text{MeV}\,\text{cm}^2/\text{g}$$

$$W_{\max} \approx 2m_e\beta^2\gamma^2c^2$$ Massima energia trasferita in una collisione (knock-on)

δ è la correzione per l'effetto densità: all'aumentare dell'energia della particella incidente il suo campo elettrico si estende nello spazio e la distanza di interazione aumenta come ln βγ. Tuttavia in conseguenza di ciò, il mezzo attraversato si polarizza, gli elettroni più distanti risultano schermati dal campo elettrico e quindi l'energia ad essi trasferita è minore.

C è la correzione di shell che diventa rilevante quando la velocità della particella è inferiore alla velocità orbitale degli elettroni.

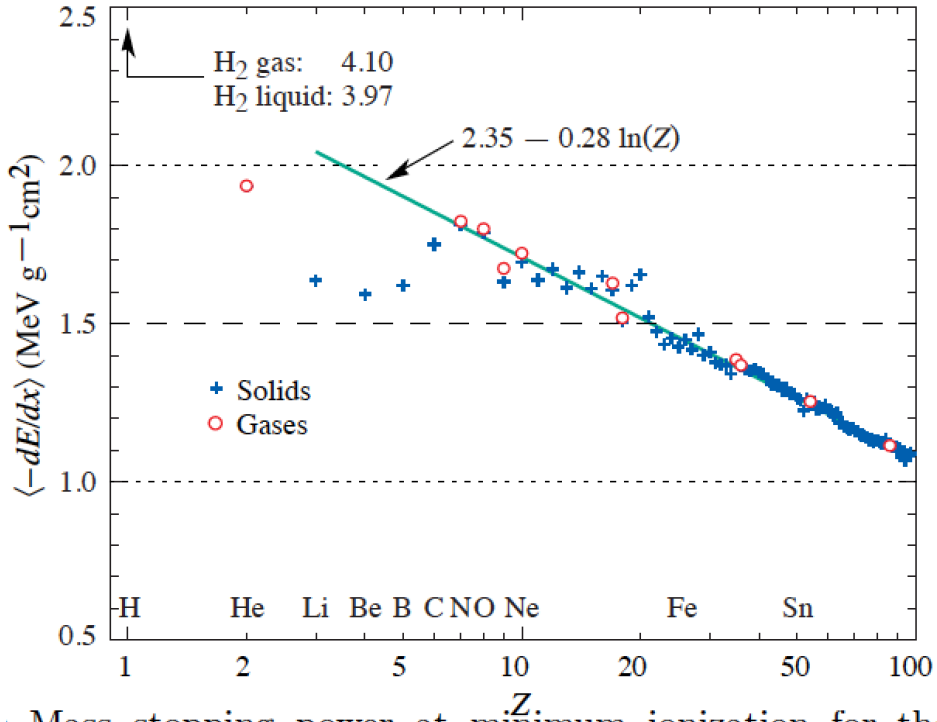
C, δ, I sono ricavati per diversi materiali fittando i dati sperimentali

E' conveniente esprimere lo spessore attraversato dx come ρdx (spessore massico, in g/cm^2) perché così dE/dx diventa quasi indipendente dal tipo di materiale (essendo Z/A ~1/2 e la dipendenza di I da Z nel log piccola)

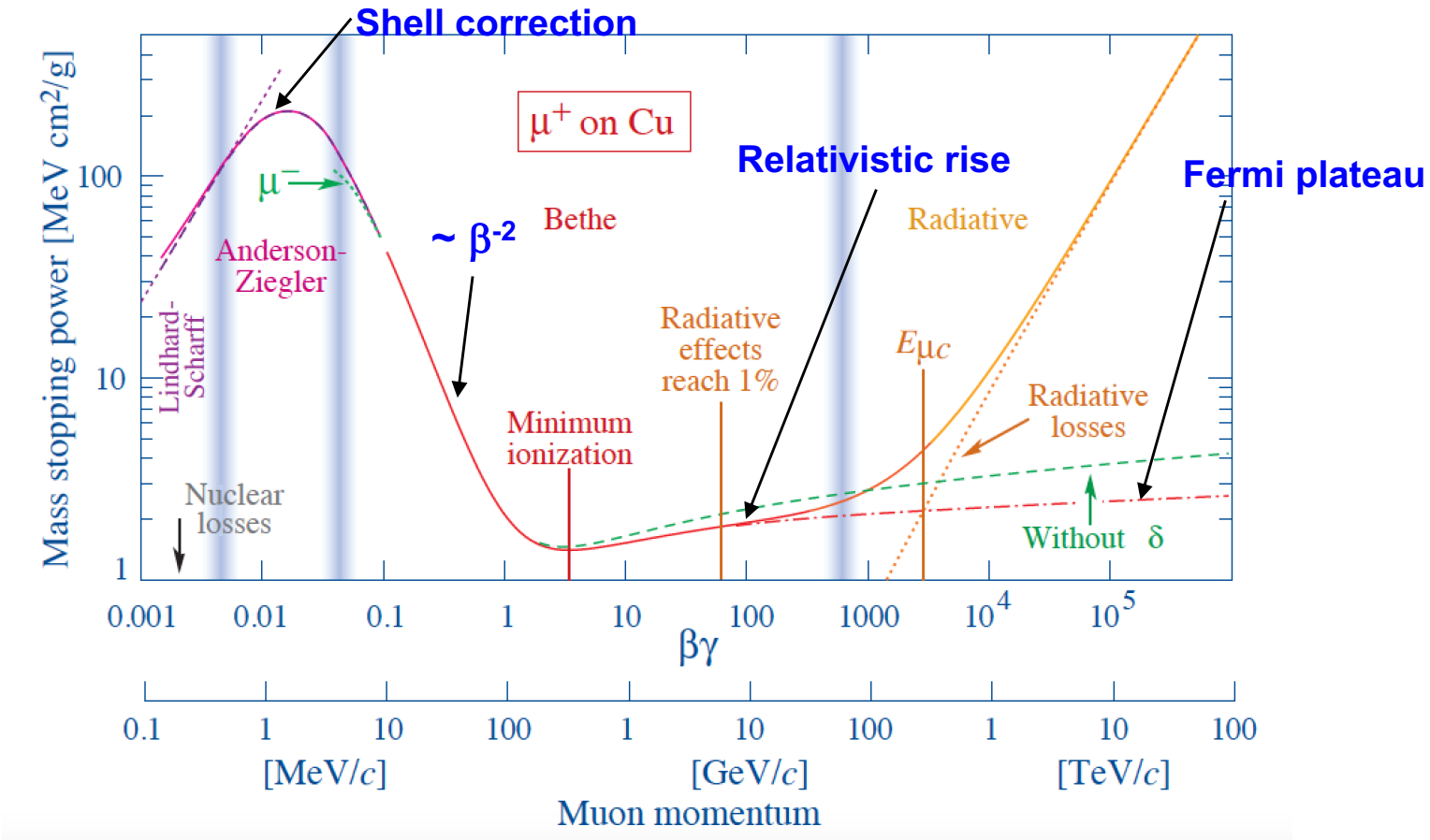
$$-\frac{dE}{\rho\, dx} \propto \frac{Z}{A}$$

Quindi dE/dx si esprime in MeV cm^2/g.

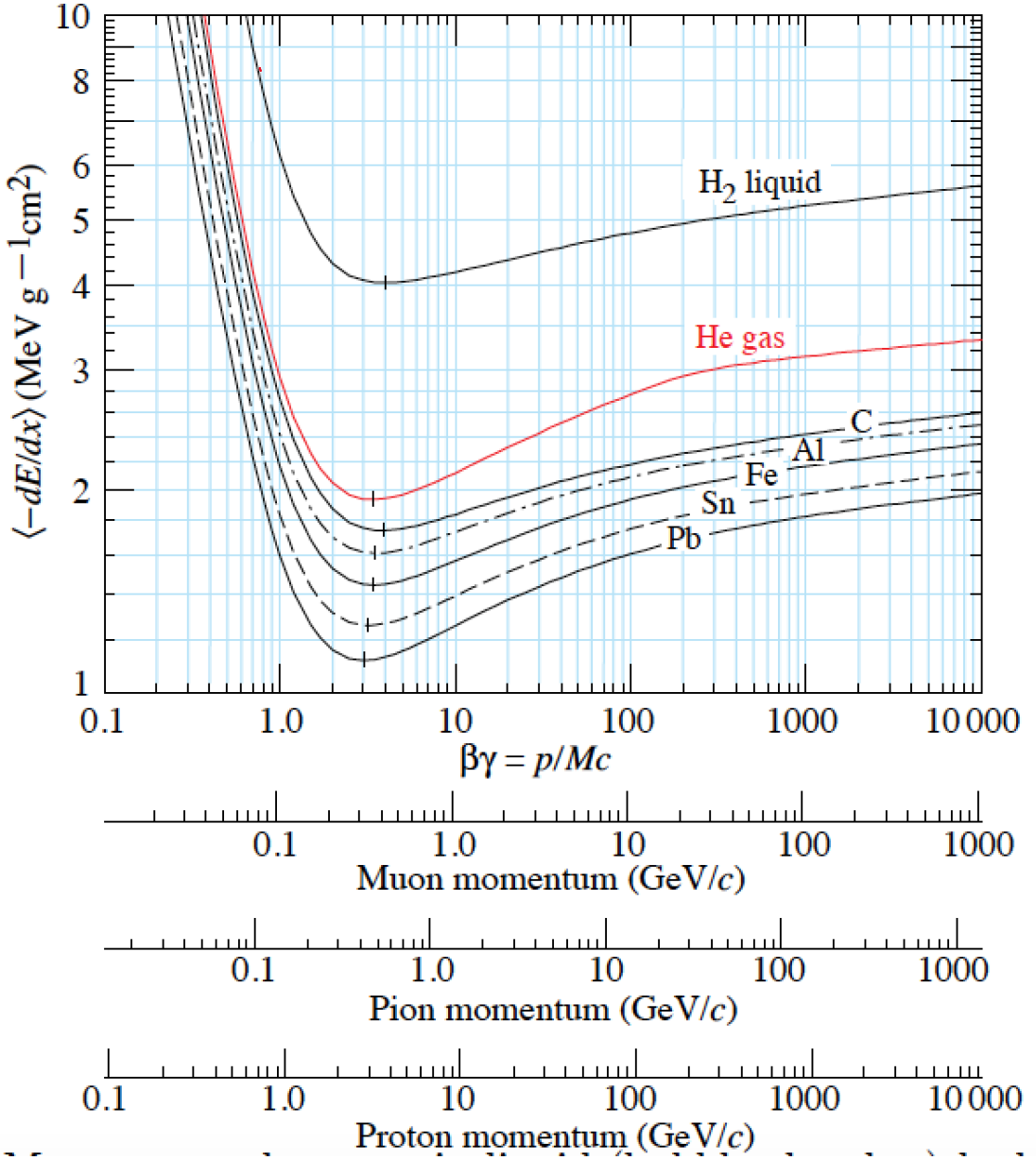
Es: Un protone da 10 MeV perde stessa energia attraversando 1 g/cm^2 di Cu, Al, Fe.



Mass stopping power at minimum ionization for the chemical



- dE/dx ~ $1/\beta^2$ nella regione non-relativistica prima del minimo di ionizzazione.
- Il minimo di ionizzazione si ha per $\beta\gamma$~3.5 (β=0.96) dove dE/dx~1-2 MeV cm^2/g
- Nella zona relativistica dE/dx ~ costante (plateau di Fermi), perché la risalita logaritmica è limitata da effetto densità. La risalita è al max un fattore 2 (nei gas).
- Per $\beta\gamma$<0.05 diventano importanti le correzioni di shell. La particella tende a catturare elettroni riducendo il campo elettrico e perdendo meno energia.


10
8
6
5
4
3
2
1
$\langle -dE/dx \rangle$ (MeV g^{-1}cm^2)
H_2 liquid
He gas
C
Al
Fe
Sn
Pb
0.1
1.0
10
100
1000
10 000
$\beta\gamma = p/Mc$
Muon momentum (GeV/c)
Pion momentum (GeV/c)
Proton momentum (GeV/c)

Legge di scala per dE/dx

In un dato materiale dE/dx dipende solo da carica e velocità della particella incidente

$$-\frac{dE}{\rho\, dx} = z^2 f(\beta)$$

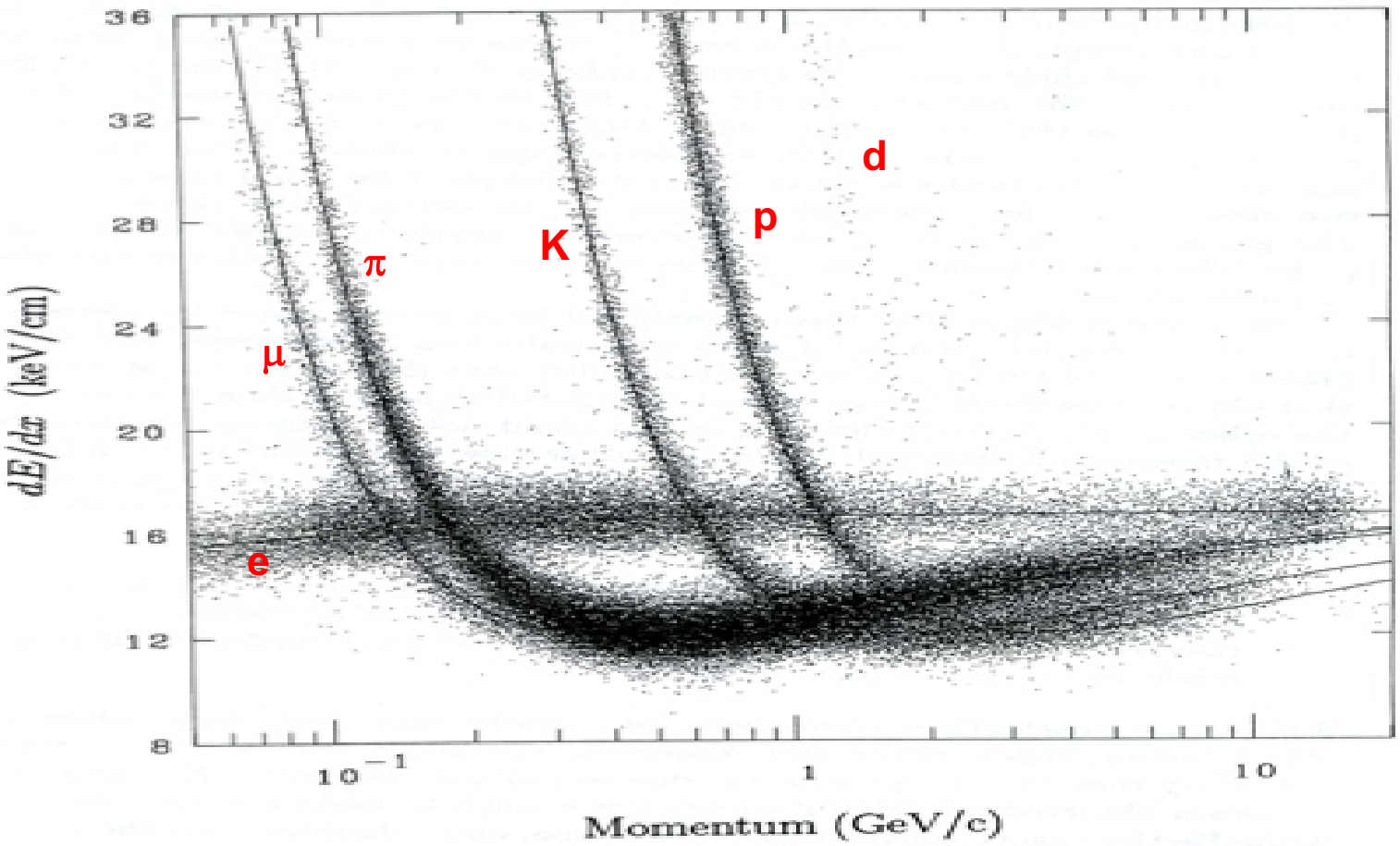
$$E_k = (\gamma - 1)Mc^2 \;\Rightarrow \beta = g\left(\frac{E_k}{M}\right) \Rightarrow \quad -\frac{dE}{\rho\, dx} = z^2 f'\left(\frac{E_k}{M}\right)$$

Se conosciamo dE/dx per un particella di massa M_1 e carica z_1 si può applicare la seguente legge di scala per ricavare dE/dx per un'altra particella M_2, z_2 nello stesso mezzo

$$-\frac{dE_1}{\rho\, dx} = z_1^2 f'\left(\frac{E_{k1}}{M_1}\right)$$

$$-\frac{dE_2}{\rho\, dx}\left(E_{k2}\right) = z_2^2 f'\left(\frac{E_{k2}}{M_2}\right) = -\frac{z_2^2}{z_1^2}\frac{dE_1}{\rho\, dx}\left(E_{k2}\,\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$-\frac{dE_2}{\rho\, dx}\left(E_{k2}\right) = -\frac{z_2^2}{z_1^2}\frac{dE_1}{\rho\, dx}\left(E_{k2}\,\frac{M_1}{M_2}\right)$$



A parità di energia cinetica le particelle più pesanti perdono più energia.

Sotto il minimo di ionizzazione si hanno curve distinte.

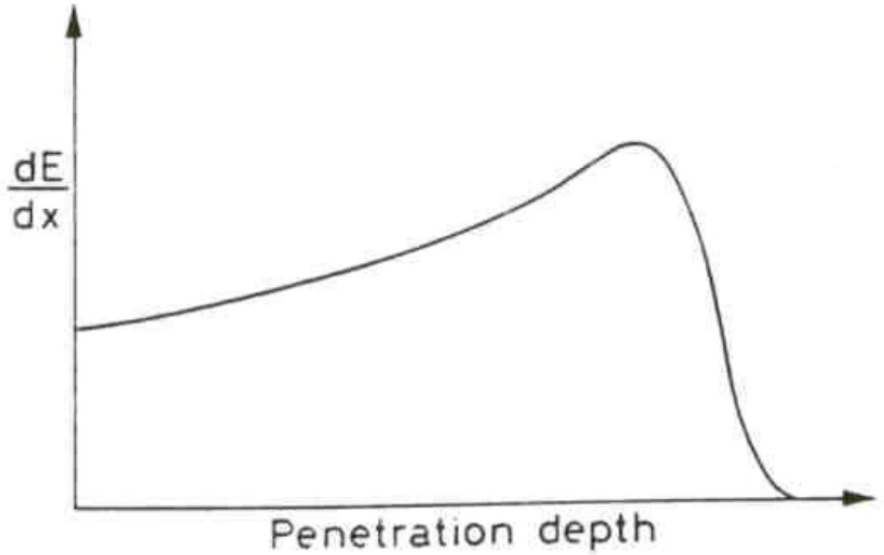
Questa proprietà è usata per l'**identificazione di particelle cariche**, se si misurano contemporaneamente l'impulso e la perdita di energia.

Curva di Bragg

Dalla formula di Bethe-Bloch si evince che dE/dx aumenta al diminuire dell'energia cinetica della particella.

Pertanto una particella rilascia tanta più energia nella materia, quanto più rallenta e si avvicina a fine corsa.

Questa caratteristica è usata in radioterapia con adroni, per rilasciare una grande dose di radiazione in un tessuto maligno e non danneggiare i tessuti sani circostanti.

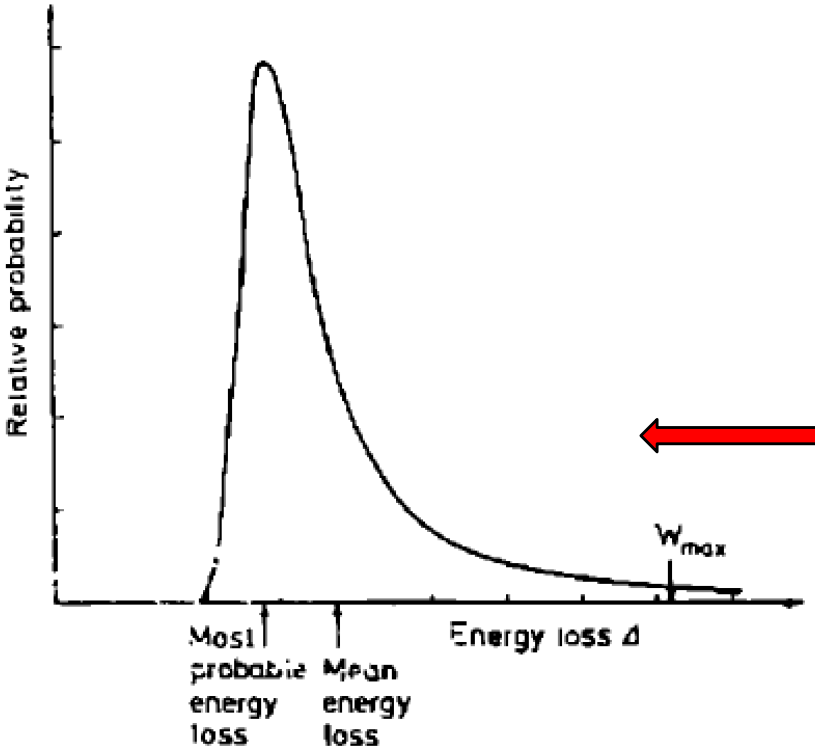


Fluttuazioni statistiche in dE/dx (energy straggling)

Il valore di dE/dx calcolato dalla formula di Bethe-Block è un valore medio.

In realtà per una particella che attraversa un mezzo, ci sono fluttuazioni nel deposito di energia in ogni collisione e fluttuazioni nel numero di collisioni.

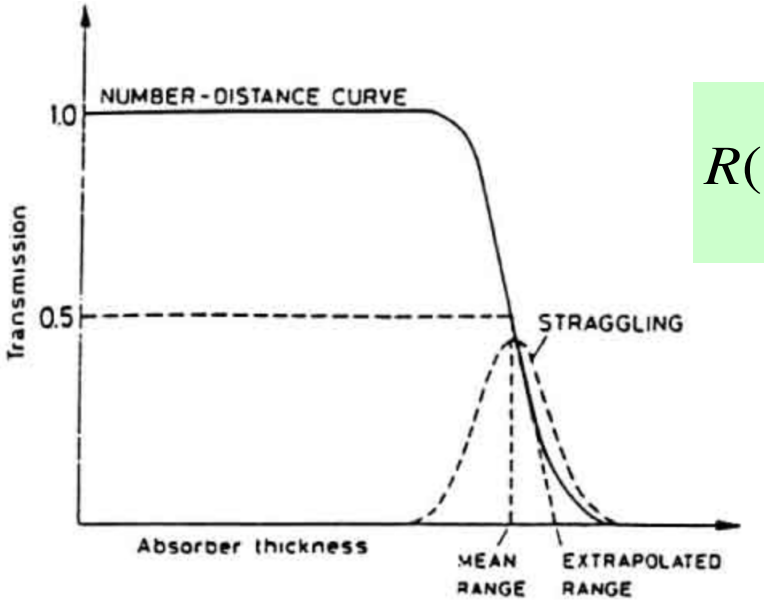
Le collisioni più probabili sono con piccolo trasferimento di energia. Quelle con grande trasferimento producono elettroni di centinaia eV (delta rays)



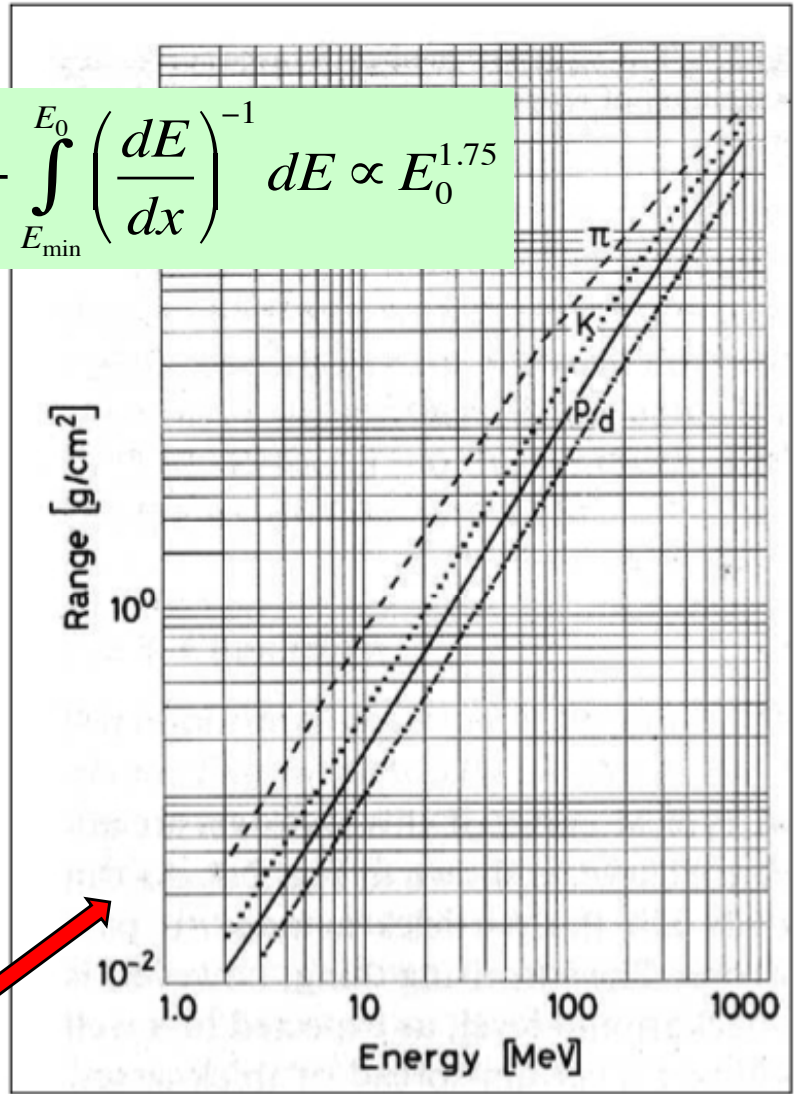
- Considerando un fascio di particelle, si ha una distribuzione di energia depositata con larghezza determinata da queste fluttuazioni (energy straggling).
- Per rivelatori sottili e di bassa densità si hanno poche collisioni, alcune con grande energia trasferita, e la distribuzione risultante è asimmetrica con code di Landau.
- Per rivelatori spessi e di alta densità si hanno molte collisioni, e, per il teorema del limite centrale, la distribuzione è gaussiana

Range di particelle cariche

Si definisce range il cammino di una particella in un mezzo prima di perdere tutta la sua energia cinetica ed arrestarsi. Si può misurare dalle curve di trasmissione



$$R(E) = R(E_{\min}) + \int_{E_{\min}}^{E_0} \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \propto E_0^{1.75}$$



- Il range dipende dall'energia cinetica iniziale E_0 della particella.
- Fluttuazioni nell'energia depositata → fluttuazioni in range (range straggling)
- Si considera percorso in linea retta, ignorando zig-zag per multiple scattering
- Relazione range-energia usata per misurare E_0 (es: schermature)

Diffusione coulombiana multipla

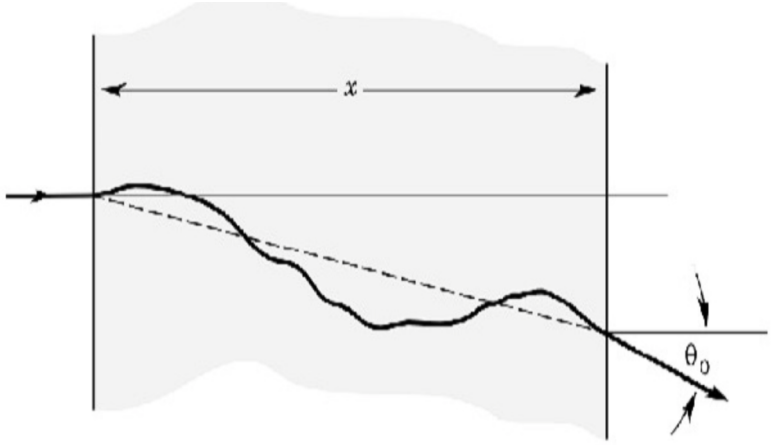
- Consideriamo lo scattering Rutherford della particella incidente con un nucleo del mezzo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E,\theta) = \left(\frac{Zz\,\alpha\hbar c}{4E}\right)^2 \sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Nel singolo urto l'energia persa è piccola ($m \ll M_{nucleo}$). La sezione d'urto aumenta per piccoli angoli, quindi le deflessioni a piccoli angoli sono le più probabili.

Per mezzi sottili, sono possibili, anche se rare, deviazioni a grandi angoli.

- Nell'attraversare un mezzo spesso, la particella può fare molte diffusioni coulombiane a piccoli angoli, e l'effetto cumulativo è una deviazione dalla direzione originale.
- Considerando le collisioni indipendenti, la distribuzione dell'angolo medio di scattering è una gaussiana con media zero e deviazione quadratica media



$$\theta_{RMS} = \sqrt{<\theta^2>} = z\frac{21\ \text{MeV}}{p\beta}\sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

p (β)= momento (velocità) della particella

z = carica della particella

x = spessore del mezzo attraversato

X_0 = lunghezza di radiazione del mezzo

Perdita di energia per $e^{\pm}$

I processi di elettroni e positroni nell'attraversare un mezzo materiale sono:

- Perdita di energia per collisioni inelastiche con gli elettroni atomici del mezzo

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \rho \frac{Z}{A}\frac{1}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{\tau^2(\tau+2)m_e^2c^4}{2I^2}\right)+F(\tau)-\delta-2\frac{C}{Z}\right]$$

con $\tau = \dfrac{T_e}{m_e c^2}$, T_e=energia cinetica del proiettile, $F(\tau)$ è una funzione differente per $e^{\pm}$

Andamento simile a Bethe-Block, con modifiche dovute al fatto che:

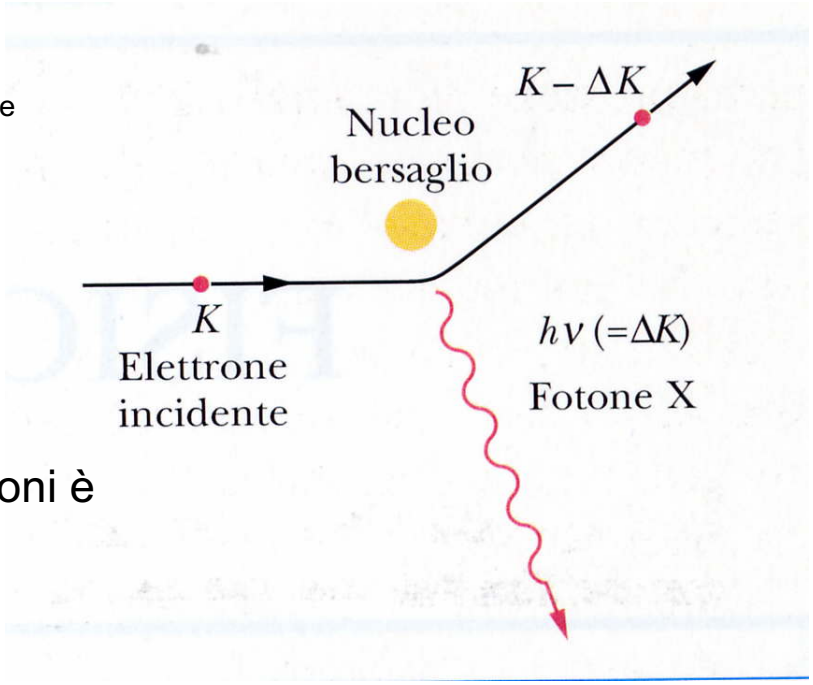
- nell'urto le masse sono uguali ➔ $W_{max} = T_e/2$, deflessioni rilevanti.
- nel caso elettrone-elettrone particelle identiche ➔ Forze di scambio (trattazione quantistica)

- scattering Coulombiano (deflessioni significative nell'interazione con i nuclei)
- perdita di energia per irraggiamento ("radiazione di frenamento", *bremmsstrahlung*)
- annichilazione positrone-elettrone $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$

Bremsstrahlung

La perdita di energia per irraggiamento nel campo elettrico del nucleo è particolarmente rilevante per gli elettroni. Essi possono perdere anche notevoli quantità della loro energia cinetica per emissione di fotoni e venire fortemente deviati.

- La potenza emessa è proporzionale all'accelerazione^2 (equ. Larmor in elettrodinamica).
- Perdite trascurabili per particelle non relativistiche
- Se b >> R_{Nucleo} → campo elettrico di carica puntiforme Ze nel centro dell'atomo
  Se b >=R_{Atomo} → effetto di schermo degli elettroni
- $\sigma_{rad} \sim (e^2/m)^2 \rightarrow \Delta E_\mu = (m_e/m_\mu)^2 \Delta E_e = 1/40000\ \Delta E_e$



- I fotoni emessi hanno energia 0< Eγ <E
- La probabilità di emissione di un fotone con energia Eγ è P(Eγ) = 1/Eγ
- Per E>> $m_e c^2$, l'angolo medio di emissione dei fotoni è

$$<\theta> = \frac{m_e c^2}{E}$$

quindi dipende da energia E dell'elettrone, ma non dall'energia Eγ del fotone.

La perdita per irraggiamento per unità di lunghezza è data da (complete screening)

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = 4r_e^2\alpha\frac{N_A Z^2\rho}{A}\left[\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right)+\frac{1}{18}-f(Z)\right]E \approx \frac{E}{X_0}$$

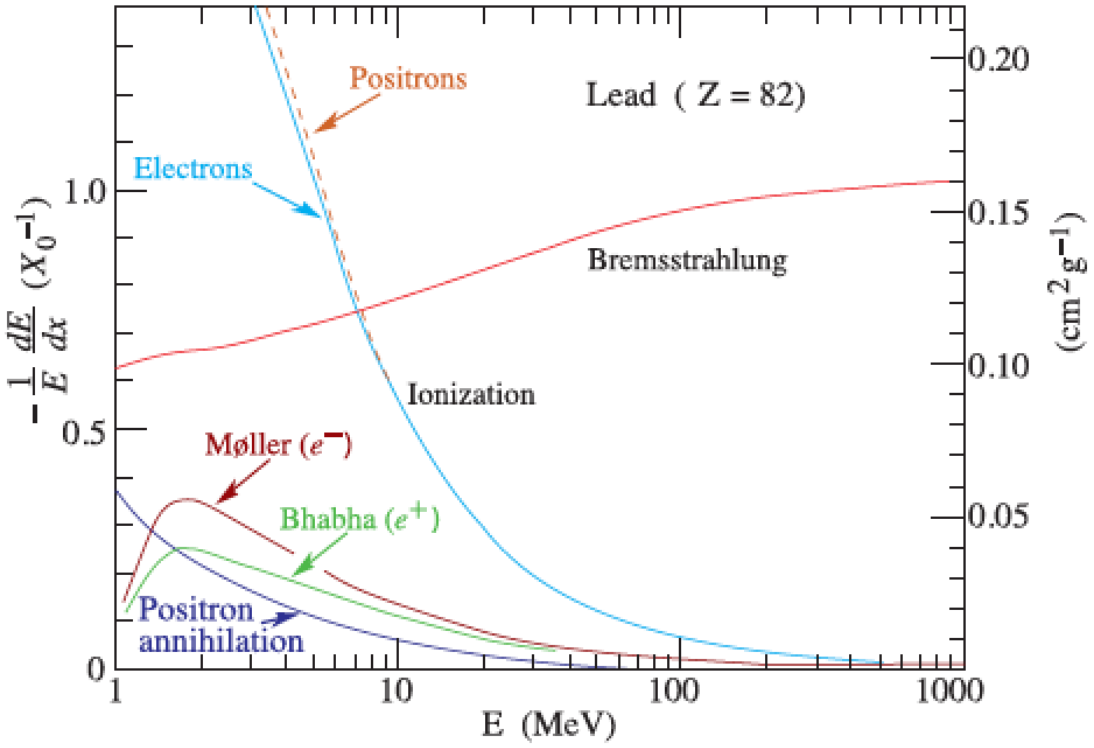
$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

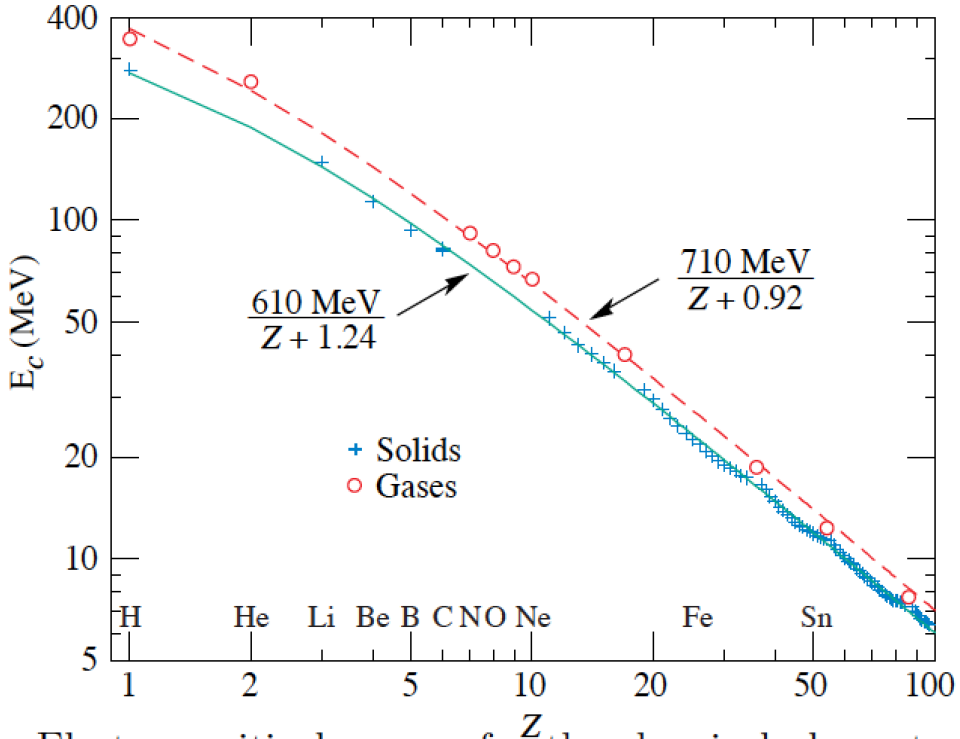
$$E(X_0) = \frac{E_0}{e}$$

X_0 è la lunghezza di radiazione e dipende dal materiale

$$\frac{1}{X_0} = 4r_e^2\alpha\frac{N_A Z(Z+1)\rho}{A}\left[\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right)-f(Z)\right]$$

X_0 è lo spessore dopo cui l'energia dell'elettrone è 1/e di quella iniziale per effetto dell'irraggiamento.





: Electron critical energy for the chemical elements, using Rossi's
The fits shown are for solids and liquids (solid line) and gases
The rms deviation is 2.2% for the solids and 4.0% for the gases.

Element	Z	E_c, MeV	X_0, g cm^{-2}
hydrogen	1	340	63.1
helium	2	220	94.3
carbon	6	103	42.7
aluminium	11	47	24.0
iron	26	24	13.8
lead	82	6.9	6.4

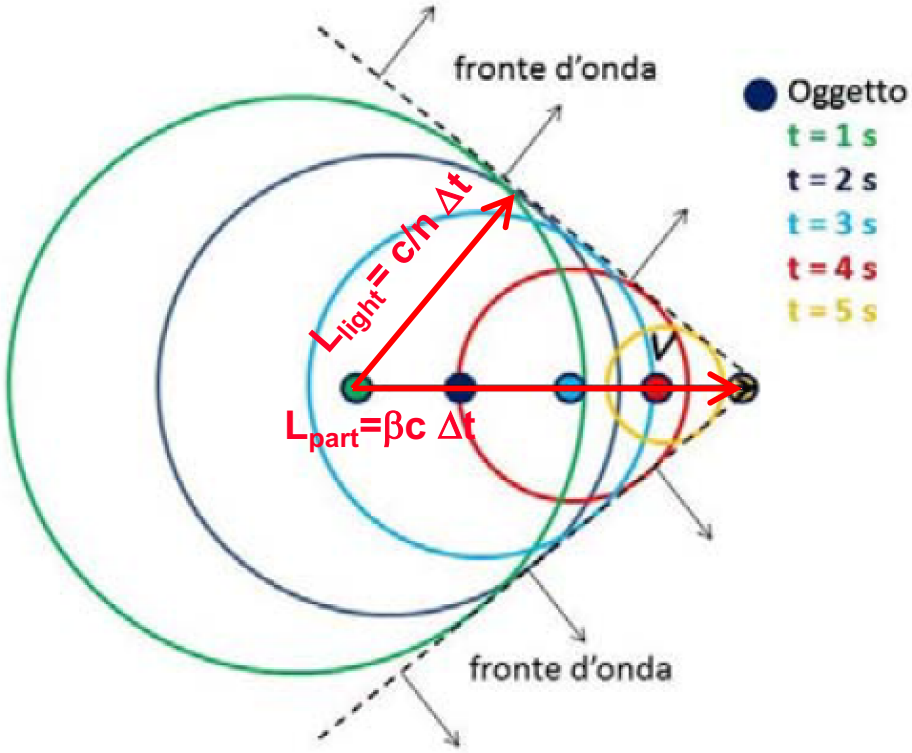
L'**energia critica E_c** è definita come l'energia per cui $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad}$

Per $E>E_c$ le perdite di energia per irraggiamento diventano dominanti

Effetto Cherenkov

- La radiazione Cherenkov è emessa da particelle cariche che attraversano un mezzo dielettrico con velocità v maggiore della velocità della luce nel mezzo, cioè **v > c/n**, dove n è l'indice di rifrazione del mezzo.

  Si forma un'onda d'urto elettromagnetica. Il fronte d'onda coerente della radiazione emessa ha forma conica con asse la direzione della particella e apertura angolare:



$$\cos\theta_C = \frac{1}{n\beta}$$

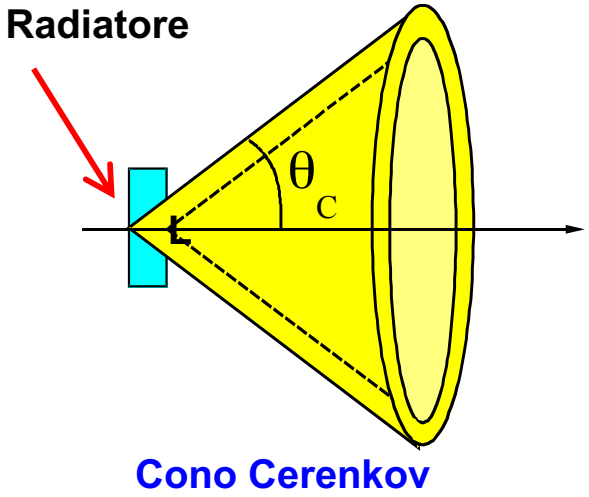
Esiste una velocità di soglia $\beta > \frac{1}{n}$

Esiste un angolo massimo (per β=1)

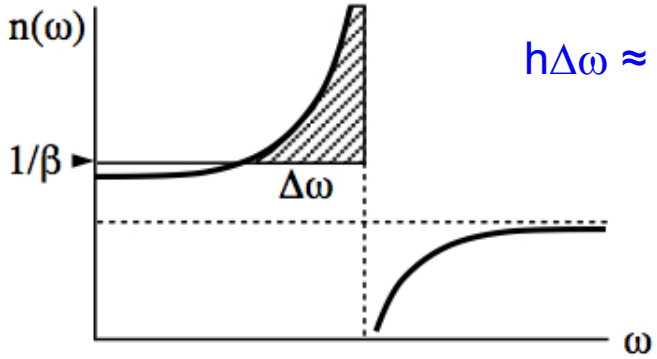
$$\theta_C^{Max} = \arccos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Analogia con l'onda d'urto di un aereo quando supera la barriera del suono (1238 km/h)

Luce Cerenkov emessa dal nocciolo di un reattore nucleare



- La luce emessa si propaga sulla superficie di un cono di apertura θ_C
- La legge è valida per lunghezza del radiatore L>>λ
- Fotoni emessi nel visibile o UV dove n(ω)>1 e n(ω)>1/β



- L'energia persa dalle particelle cariche per polarizzare il dielettrico è riemessa con uno spettro di frequenza continuo e fotoni linearmente polarizzati.
- Il numero di fotoni emessi da una particella di carica *ze* per unità di cammino percorso *dx* e in un intervallo di frequenza $d\omega$ o di lunghezza d'onda $d\lambda$ dei fotoni:

$$\frac{dN}{dx\,d\omega} = \frac{z^2\alpha}{c}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) = \frac{z^2\alpha}{c}\sin^2\theta_C(\omega)$$

$$\frac{dN}{dx\,d\lambda} = \frac{2\pi z^2\alpha}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)}\right) = \frac{2\pi z^2\alpha}{\lambda^2}\sin^2\theta_C(\lambda)$$

Il numero di fotoni emessi per unità di percorso si ottiene integrando nell'intervallo di frequenza $\Delta\omega$ ammesso

$$\frac{dN}{dx} = \frac{z^2 \alpha}{c} \int_{\Delta\omega} \sin^2 \theta_C(\omega) d\omega \approx \frac{z^2 \alpha}{c} < \sin^2 \theta_C > \Delta\omega$$

che per $h\Delta\omega$ = 2 eV e il numero medio di fotoni emessi per unità di percorso è

$$< \frac{dN}{dx} > \approx 600\, z^2 \sin^2 \theta_C \quad \text{fotoni cm}^{-1}$$

L'emissione della radiazione Cherenkov non contribuisce apprezzabilmente alla perdita di energia della particella, in quanto 600 fotoni x 2 eV = 1.2 keV.

In pratica si ha

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{Cer} \approx 10^{-3} \ \text{MeV cm}^2 g^{-1} \qquad \text{solidi}$$

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{Cer} \approx 0.01 - 0.1 \ \text{MeV cm}^2 g^{-1} \quad \text{gas}$$

Radiazione indirettamente ionizzante

- Al contrario delle particelle cariche, neutroni e fotoni non avendo carica non subiscono le numerose collisioni con gli elettroni atomici e quindi non sono continuamente rallentati.

  Essi possono essere assorbiti completamente in un'unica collisione (il neutrone da un nucleo, il fotone da un elettrone atomico o da un nucleo).
- Al contrario delle particelle cariche, non esistono distanze che fotoni o neutroni non possano attraversare.

  L'assorbimento di neutroni e fotoni nella materia, e quindi l'attenuazione di un fascio, ha un comportamento probabilistico.
- I principali processi di interazione per fotoni e neutroni sono:

Neutroni
Cattura neutronica
Urti elastici
Urti anelastici

Fotoni
Effetto fotoelettrico
Effetto Compton
Produzione di coppie

Effetto fotoelettrico

- Assorbimento di un fotone da parte di un elettrone atomico $\gamma + A \longrightarrow A^+ + e^-$

  L'elettrone viene espulso dall'atomo con un 'energia cinetica

  $$T_e = h\nu - E_{legame}$$

  Si tratta quindi un processo a soglia.

  L'atomo rimane in uno stato eccitato e ritorna allo stato fondamentale con emissione di raggi X caratteristici o elettroni Auger.

- L'effetto fotoelettrico non è possibile per un elettrone libero.
  Se lo fosse, cioè si verificasse il processo $\gamma + e^- \longrightarrow e^-$, nel SCM si avrebbe

  $$\left(E_\gamma, \vec{p}\right) + \left(E_e, -\vec{p}\right) = \left(m_e, 0\right)$$

  $$\Rightarrow m_e = E_\gamma + E_e = E_\gamma + \sqrt{m_e^2 + p^2}$$

  ma l'uguaglianza è verificato solo per un fotone con impulso nullo → impossibile!

  Quindi l'assorbimento del fotone può avvenire solo con un elettrone legato.

- In questo processo, il fotone scompare e l'elettrone perderà la sua energia nelle collisioni con gli elettroni esterni degli atomi del mezzo.

La sezione d'urto è una funzione complicata da calcolare, e inoltre ha discontinuità per energie corrispondenti alle energie di legame degli shell atomici K,L,M.

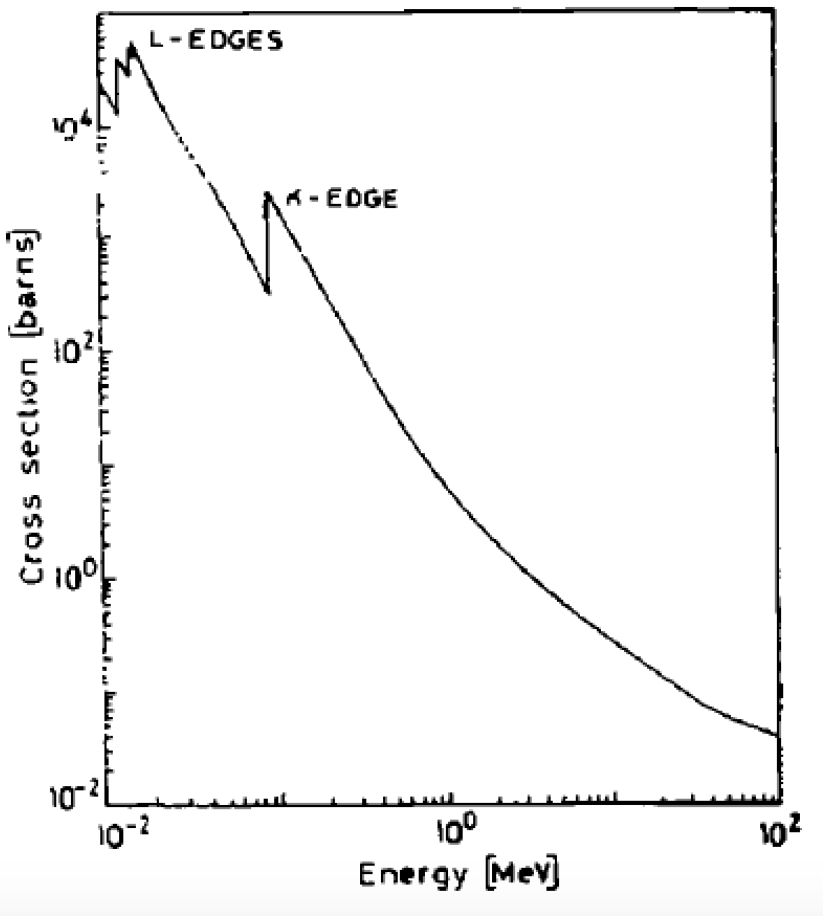
Si può approssimare la sezione d'urto come

$$E_\gamma << m_e c^2 \quad \sigma_{ph} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma^{3.5}}$$

$$E_\gamma >> m_e c^2 \quad \sigma_{ph} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma}$$

L'effetto fotoelettrico è quindi dominante a basse energie e per materiali ad alto Z.

Materiali ad alto Z sono usati per schermature e rivelatori di fotoni.



Effetto Compton

Urto elastico di un fotone su di un elettrone atomico $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Gli elettroni possono considerarsi liberi se l'energia dei fotoni >> energia legame degli elettroni.

Abbiamo già studiato la cinematica del processo (Slide E1, es. 1). L'energia del fotone ($h\nu'$) e dell'elettrone (E) diffusi in funzione dell'energia del fotone incidente ($h\nu$) e dell'angolo di diffusione del fotone θ, sono

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1+\varepsilon(1-\cos\theta)} \qquad E = h\nu - h\nu' = \frac{m_e c^2 \varepsilon^2 (1-\cos\theta)}{1+\varepsilon(1-\cos\theta)}$$

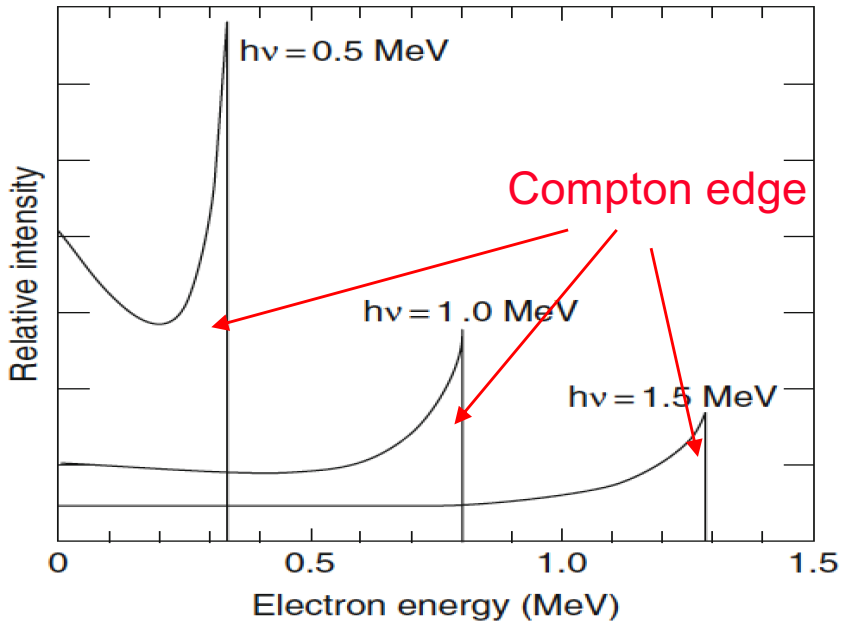
dove $\varepsilon = \dfrac{h\nu}{m_e c^2}$

Per θ=0° → E = 0 $h\nu' = h\nu$

Per θ=180° → **Compton edge** (massimo trasferimento di energia all'elettrone)

$$h\nu'_{\min} = \frac{h\nu}{1+2\varepsilon} \qquad E_e^{\max} = \frac{2 m_e c^2 \varepsilon^2}{(1+2\varepsilon)}$$

Distribuzione energia dell'elettrone per vari valori di energia dei fotoni incidenti

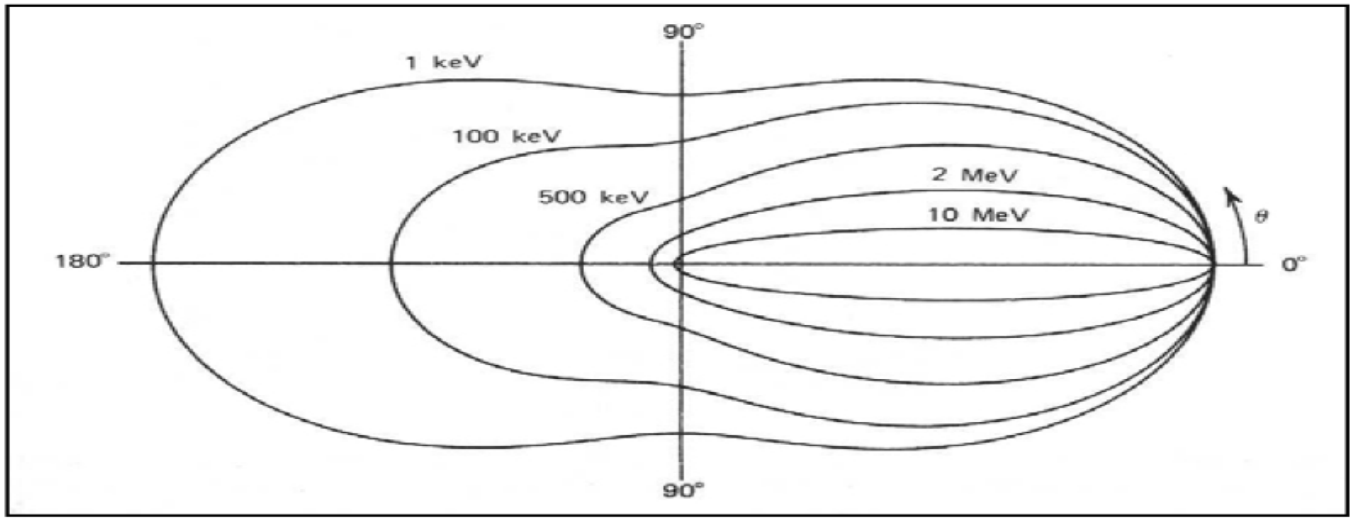


La sezione d'urto differenziale Compton (calcolo di QED) è la formula di Klein-Nishina

$$\frac{d\sigma_C}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\frac{1}{\left[1+\varepsilon(1-\cos\theta)\right]^2}\left(1+\cos^2\theta+\frac{\varepsilon^2(1-\cos\theta)^2}{1+\varepsilon(1-\cos\theta)}\right)$$

da cui integrando su angolo solido si ottiene la sezione d'urto totale Compton

$$\sigma_C = 2\pi r_e^2\left\{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\left[\frac{2(1+\varepsilon)}{1+2\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\ln(1+2\varepsilon)\right]+\frac{1}{2\varepsilon}\ln(1+2\varepsilon)-\frac{1+3\varepsilon}{(1+2\varepsilon)^2}\right\}$$



polar plot: numero di fotoni diffusi per unità di angolo solido ad un angolo θ

- A basse energie (~keV) la distribuzione angolare è isotropa
- Ad alte energia (MeV) forward scattering.

Notiamo che per

$$\varepsilon << 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_C = \frac{8}{3}\pi r_e^2$$

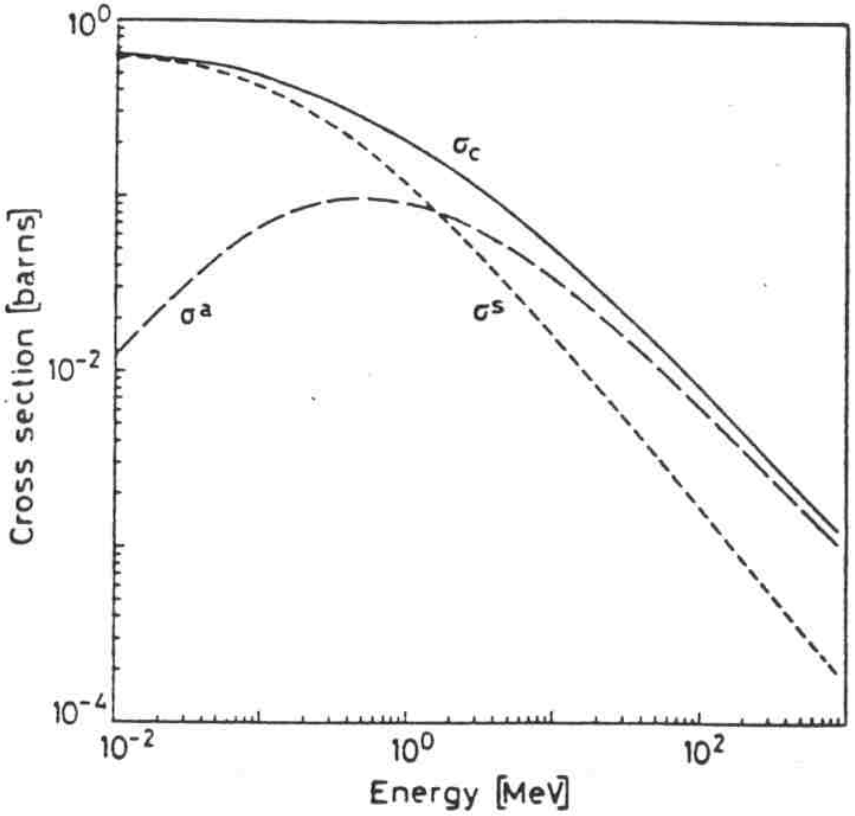
$$\varepsilon >> 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_C \propto \frac{1}{h\nu}$$

Sezione d'urto Thomson

Scattering Thomson: scattering su elettrone libero nel limite di basse energie.

Scattering Rayleigh: diffusione del fotone da parte dell'atomo nel suo insieme. Gli elettroni rispondono in modo coerente.

In entrambi questi processi, non c'e' trasferimento di energia al mezzo (no eccitazione, ionizzazione atomo), ma solo diffusione del fotone



Sezione d'urto totale Compton

Produzione di coppie e^+ e^-

- La produzione di coppie $e^{\pm}$ può avvenire solo nel campo coulombiano del nucleo o di elettroni atomici, secondo le reazioni

$$\gamma + N \rightarrow \left(e^- + e^+\right) + N$$

$$\gamma + e^- \rightarrow \left(e^- + e^+\right) + e^-$$

Il processo $\gamma \rightarrow \left(e^- + e^+\right)$ non può avvenire un quanto non ci sarebbe conservazione della quantità di moto.

- Il processo è a soglia

$$E_\gamma^{\min} \approx 2\,m_e = 1.022 \quad \text{MeV} \quad \text{(su nucleo)}$$

$$E_\gamma^{\min} \approx 4\,m_e = 2.044 \quad \text{MeV} \quad \text{(su elettrone)}$$

- E' analogo a *bremmstrahlung*. La sezione d'urto di Bethe-Heitler si può calcolare in modo analitico nei due casi estremi in cui lo screening degli elettroni atomici sul campo del nucleo è assente o completo.

$$m_e c^2 << h\nu << 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$$

$$\sigma_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left[\frac{7}{9} \left(\ln \frac{2h\nu}{m_e c^2} - f(Z) \right) - \frac{109}{54} \right]$$ (no screening)

$$h\nu >> 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$$

$$\sigma_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left[\frac{7}{9} \left(\ln \frac{183}{Z^{1/3}} - f(Z) \right) - \frac{1}{54} \right]$$ (complete screening)

Quindi ad alte energie, la sezione d'urto è costante e si può riscrivere come

$$\sigma_{pair} \approx \frac{7}{9} \frac{1}{X_0} \frac{A}{N_A}$$

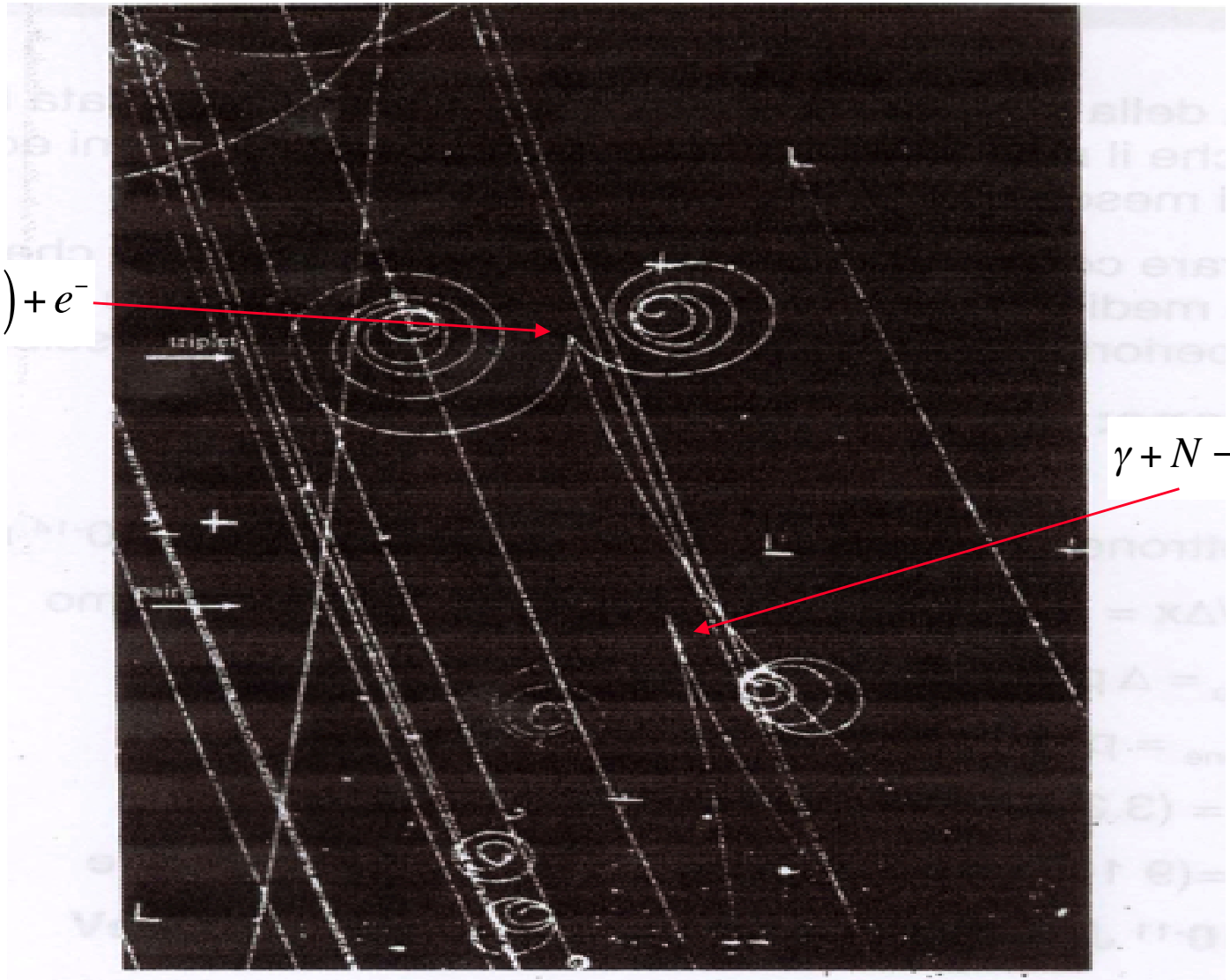
Si può definire un cammino libero medio per produzione di coppia

$$\lambda_{pair} \approx \frac{9}{7} X_0$$

- L'angolo medio di apertura della coppia $e^{\pm}$ $$< \theta > \approx \frac{m_e c^2}{E_\gamma}$$

Produzione di coppie in camera a bolle

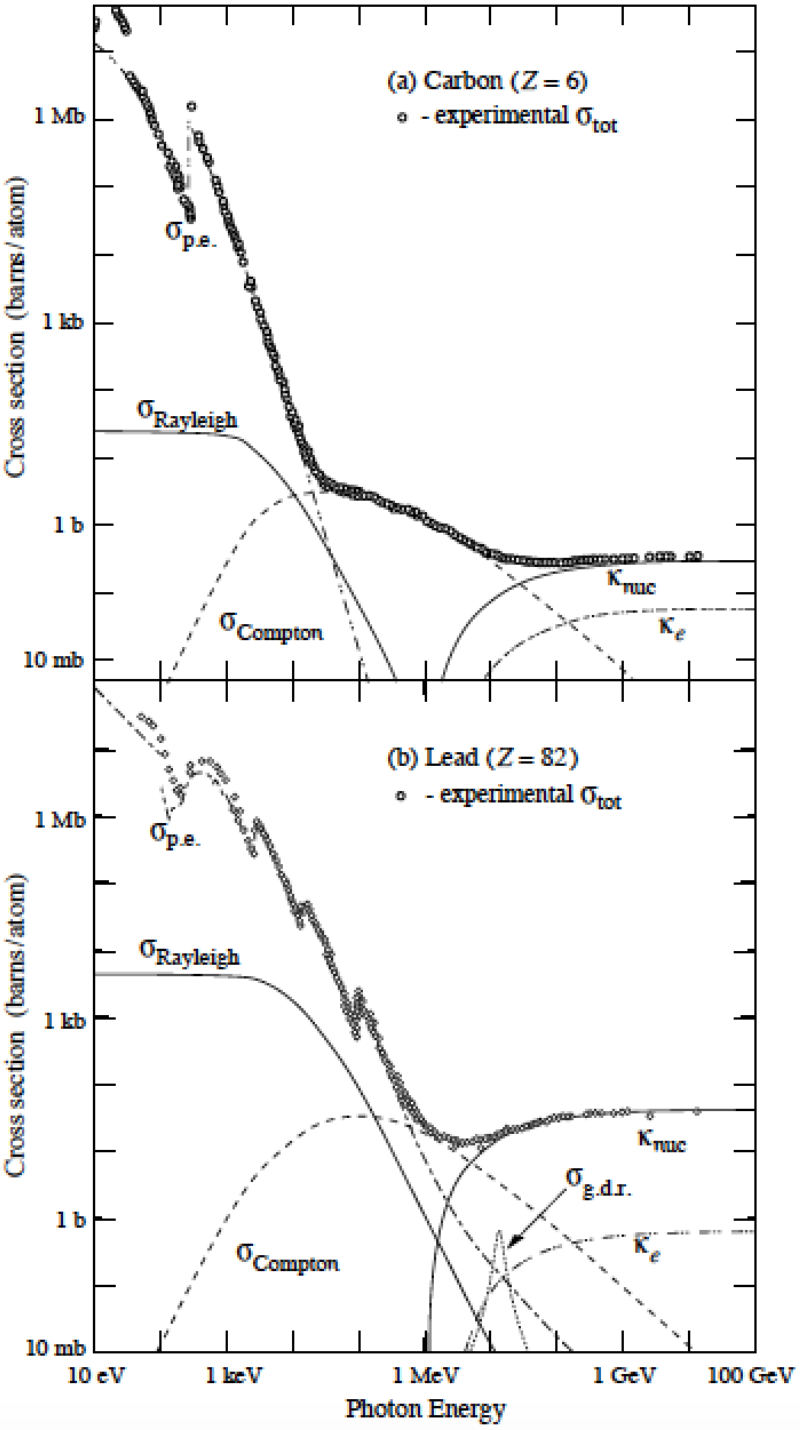
$$\gamma + e^- \rightarrow \left(e^- + e^+\right) + e^-$$

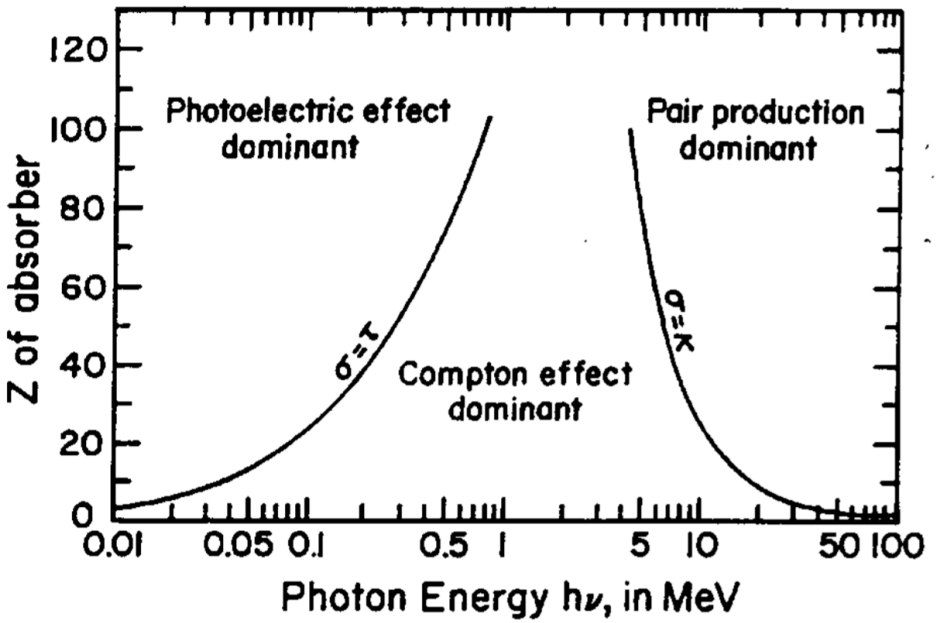


$$\gamma + N \rightarrow \left(e^- + e^+\right) + N$$

Figura 2.28. Formazione di una coppia elettrone-positrone nel campo di un elettrone (tripletto). Formazione di una coppia nel campo di un protone (coppia). (Camera a bolle a idrogeno). [Foto gentilmente concessa dal Lawrence Radiation Laboratory].

Sezione d'urto dei fotoni

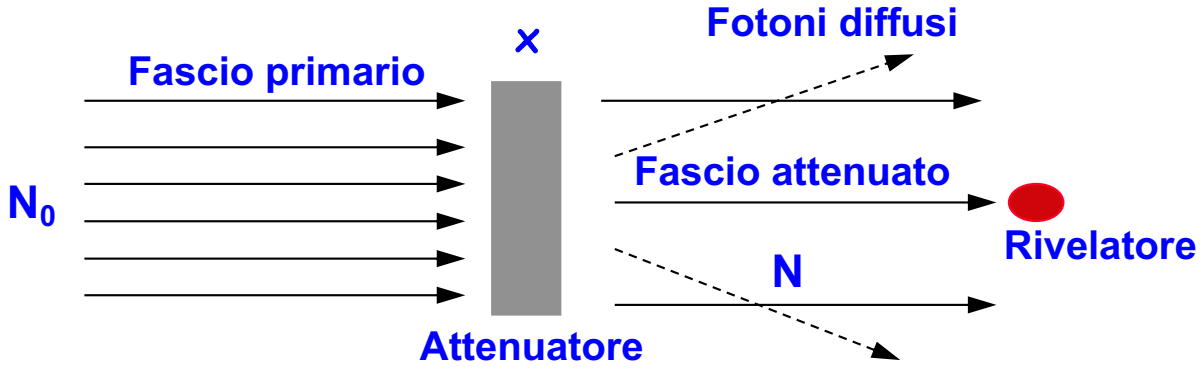




Dipendenza di effetto fotoelettrico, Compton e produzione di coppia da energia dei fotoni e numero atomico Z del materiale

Attenuazione dei fotoni

Un fascio di fotoni, attraversando uno spessore di materiale, viene attenuato poiché i singoli fotoni sono assorbiti o deviati a seconda del tipo di interazione (fotoelettrico, Compton, produzione di coppia).



Il numero di fotoni ancora presenti nel fascio dopo uno spessore x è $N(x) = N_0 e^{-\mu x}$

Il coefficiente di attenuazione μ e libero cammino medio λ sono legati dalla relazione

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = \rho \frac{N_A}{A} \sigma_{tot} \qquad \text{con} \qquad \sigma_{tot} = \sigma_{ph} + Z\sigma_C + \sigma_{pair}$$

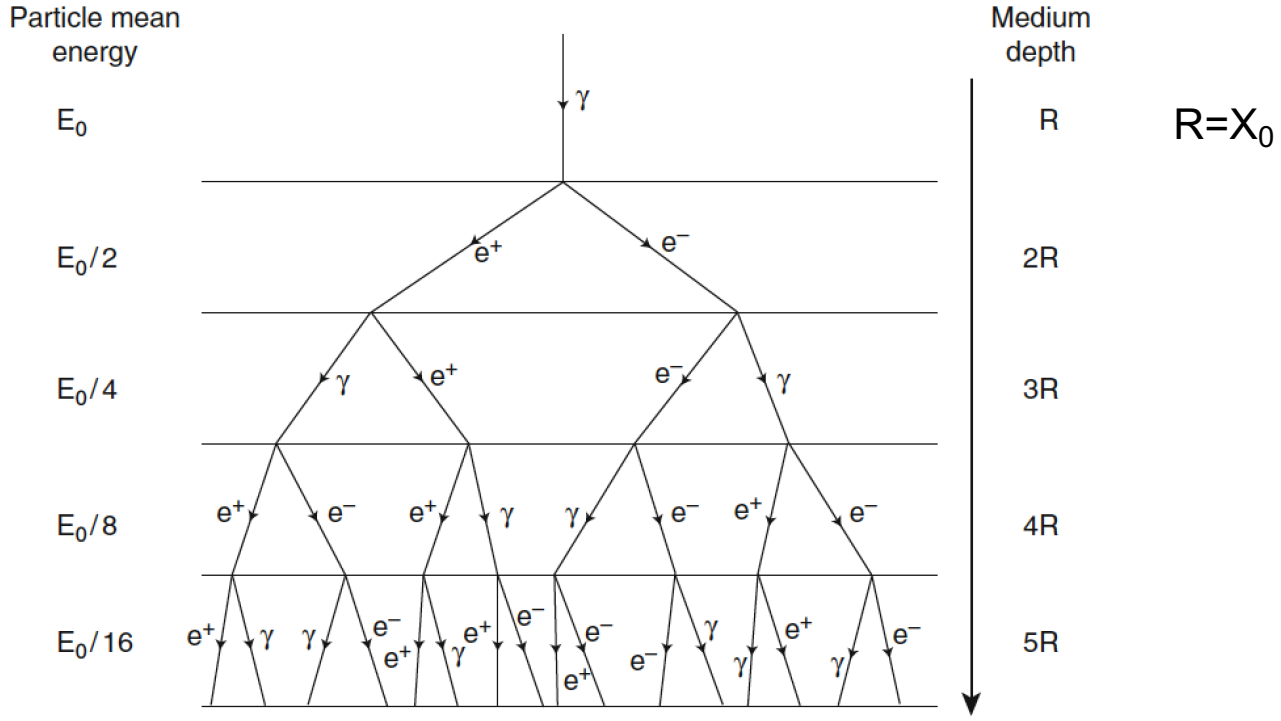
(la sezione Compton è moltiplicata per Z al fine di considerare tutti gli elettroni dell'atomo).

Spesso si usa il coefficiente di attenuazione massico del materiale μ/ρ (cm^2/g) perché dipende solo dall'energia del fascio e non dal materiale.

Sciami elettromagnetici

Semplice modello qualitativo

- Si considerano solo Bremmsstrahlung e produzione di coppia.
- La particella primaria (che inizia lo sciame) ha energia $E_0 >> E_c$
- Si assume $X_0 \approx \lambda_{pair}$
- In ogni X_0 ogni particella produce due secondari ciascuno con metà della sua energia
- I secondari sono emessi in avanti con $\langle\theta\rangle \sim 1/E_s$, dove E_s è l'energia dei secondari
- I secondari non cedono energia al mezzo fino a quando hanno $E_s > E_c$



$R = X_0$

Si esprime lo spessore attraversato x in lunghezze di radiazione, quindi $t=x/X_0$

Il numero di secondari prodotti dopo uno spessore t è $N_{\text{sec}}(t) = 2^t$

ciascuno di energia $E_{\text{sec}}(t) = \dfrac{E_0}{N_{\text{sec}}(t)} = \dfrac{E_0}{2^t}$

Il processo di moltiplicazione si arresta quando l'energia dei secondari E(t) diventa < E_C.

Quindi il massimo sviluppo dello sciame si ha per

$$E_{\text{sec}}(t_{MAX}) = E_C \quad \Rightarrow \quad t_{MAX} = \frac{\ln\left(E_0 / E_C\right)}{\ln 2}$$

In corrispondenza del quale il numero di secondari è massimo $N_{\text{sec}}(t_{MAX}) = \dfrac{E_0}{E_C}$

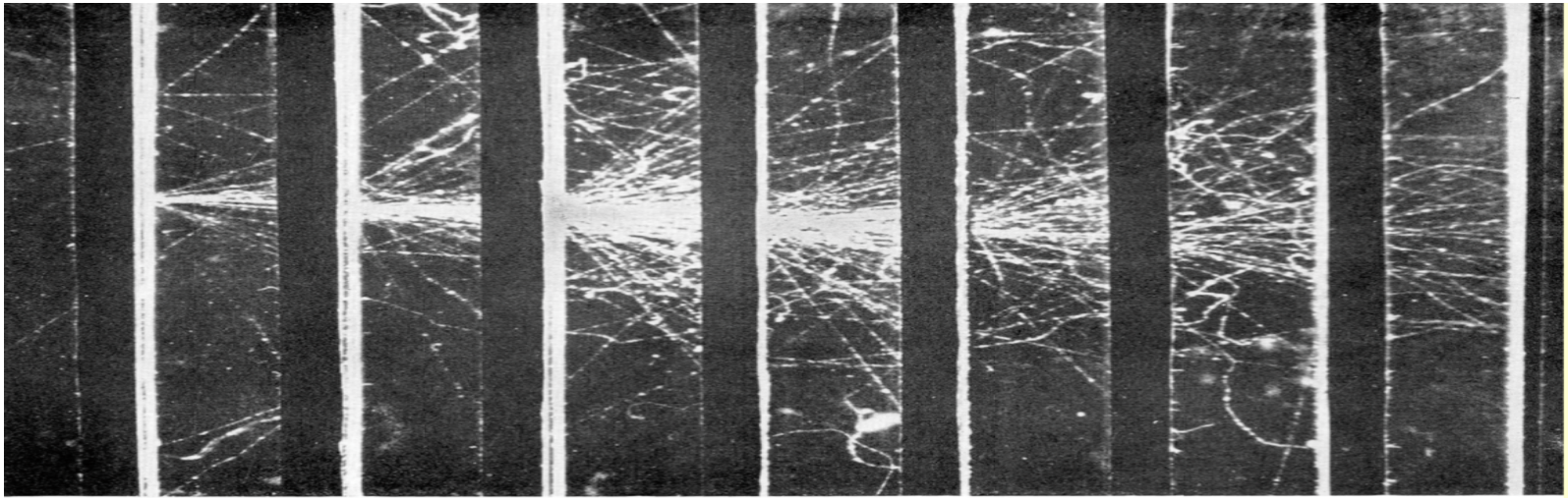
Si definisce la Total track length come la somma delle tracce di ionizzazione $TL \propto X_0 \dfrac{E_0}{E_C}$

I numero di secondari prodotto fino a t_{MAX} è $N_{tot} = \sum_{t=0}^{t_{MAX}} 2^t = 2^{(t_{MAX}+1)} - 1 \approx 2\dfrac{E_0}{E_c}$

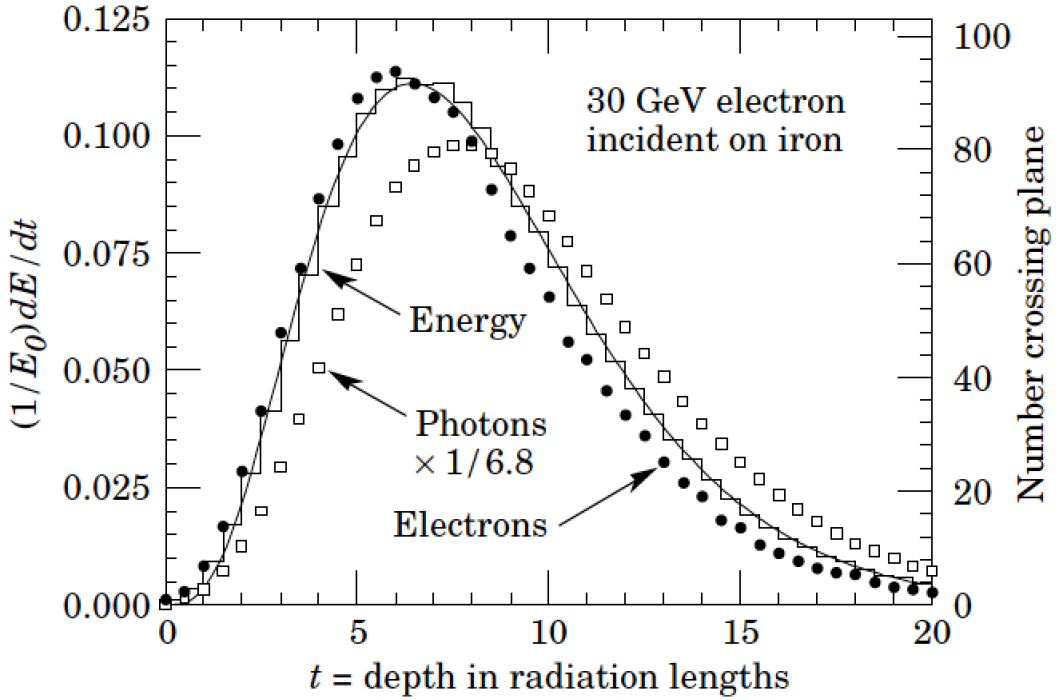
- Per $t>t_{MAX}$ i processi dominanti sono ionizzazione, Compton ed effetto fotoelettrico

→ assorbimento dei secondari, il cui numero decresce esponenzialmente.

Sciame e.m. in assorbitori di Pb



Sviluppo longitudinale di uno sciame e.m.



La dimensione laterale dello sciame è determinata da multiple scattering dei secondari carichi.

La dimensione laterale tipica dello sciame è il raggio di Moliere

$$R_{Mol} = \frac{21\,\text{MeV}}{E_C} X_0$$

In media, il 90% dell'energia dello sciame è contenuta in cilindro con raggio R_{Mol}

Neutroni

- Interazione forte. Sezioni d'urto piccole → Neutroni molto penetranti.
- Classificazione delle interazioni secondo l'energia dei neutroni:

  freddi (E~meV), termici (E≤0.01 eV), epitermici (E≤100 keV), veloci (E~MeV), alta energia (>100 MeV)
- I principali processi sono:

  n alta energia interazioni adroniche ($\sigma_{INT} \sim \pi R^2 = 35 A^{0.7}$ mb)

  n veloci Urto elastico o anelastico con nuclei.

  Maggiore rilascio di energia con target idrogenati → Moderazione

  n lenti Cattura neutronica radiativa $n + {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A+1}_{Z}X + \gamma$

  Reazioni nucleari : (n,p), (n, α), fissione

  Esempi:

  $n + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{14}_{6}C + p + 0.63\ \mathrm{MeV}$ → rilascio energia nel corpo umano

  $n + {}^{10}_{5}B \rightarrow {}^{7}_{3}Li + \alpha + 2.79\ \mathrm{MeV}$ → Boron Neutron Cancer Therapy

  - spesso il nucleo finale è radioattivo (materiali attivati)
  - più probabili a bassa energia (σ~1/v)

In tutti questi processi l'effetto finale (che si rivela) è la ionizzazione secondaria

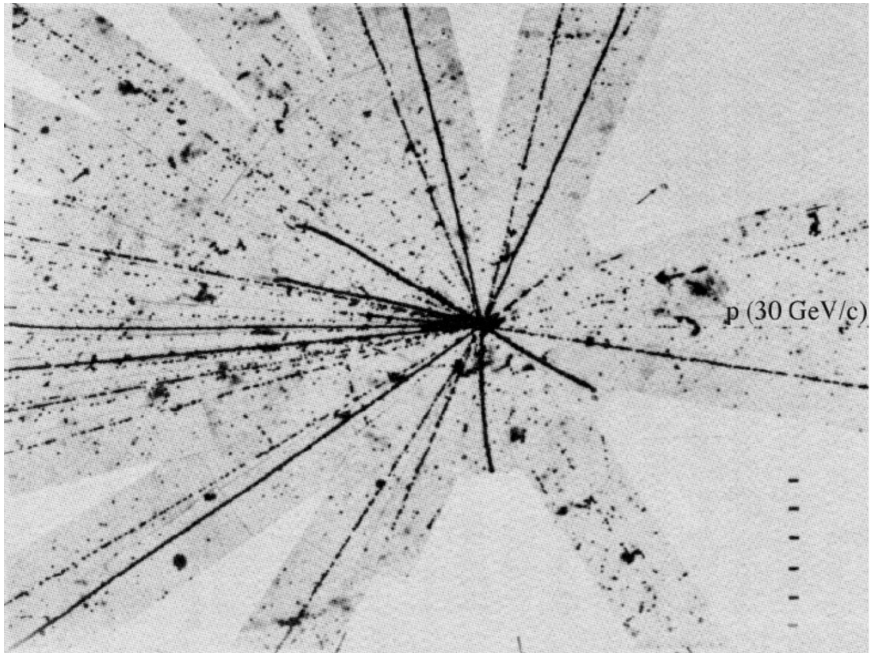
Interazioni nucleari

L'interazione di adroni energetici (carichi o neutri, p, n, π, K) con i nuclei di un materiale è determinata da processi nucleari anelastici.

- Interazione avviene in due fasi: cascata intranucleare veloce seguita da fase lenta di evaporazione
- Nella prima fase c'e' l'interazione adrone-nucleone, che può considerarsi quasi-libero nel nucleo. Il nucleone acquista energia e collide con altri nucleoni. Si forma cascata di nucleoni veloci, pioni e altri adroni. Alcune particelle di questa cascata fuoriescono dal nucleo, altre vi rimangono e ridistribuiscono energia acquistata.
- La cascata di spallazione (p, π, n, K) è fatta di leading particles con direzione circa quella della particella incidente e di elevata energia.
- Il nucleo intermedio risultante si diseccita e un certo numero di particelle sono evaporate (p, n, α) cioè emesse isotropicamente nel SLAB. La restante energia è emessa sotto forma di fotoni γ di qualche MeV.
- Se il nucleo è molto pesante (U) può fissionare, producendo frammenti nucleari

La molteplicità dei secondari è proporzionale a $\ln(E_0)$ dove E_0 è l'energia dell'adrone primario

L'impulso trasverso dei secondari $\boldsymbol{p_T \approx 0.35}$ **GeV/c**



Interazione tra un protone di 30 GeV ed un nucleo in emulsioni nucleari con conseguente "spallazione" del nucleo e produzione di numerosi secondari.

Le tracce più dense (maggiore ionizzazione) sono protoni emessi isotropicamente;

Altre meno dense rappresentano pioni veloci prodotti in avanti.

Ad alte energie (>qualche GeV) la sezione d'urto anelastica dipende poco dall'energia e dal tipo di particella incidente (p, π, k….), ma dipende dal bersaglio

$$\sigma_{inel} = 35 A^{0.7} \text{ mb}$$

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$$

Ad alte energie $\sigma_{tot} \cong \sigma_{inel}$

Si definisce la lunghezza di interazione (o assorbimento) nucleare

$$\lambda_I = \frac{A}{N_A \rho \sigma_{inel}} = 35 A^{1/3} \text{ g cm}^{-2}$$

e la nuclear collision length $\lambda_T = \frac{A}{N_A \rho \sigma_{tot}}$

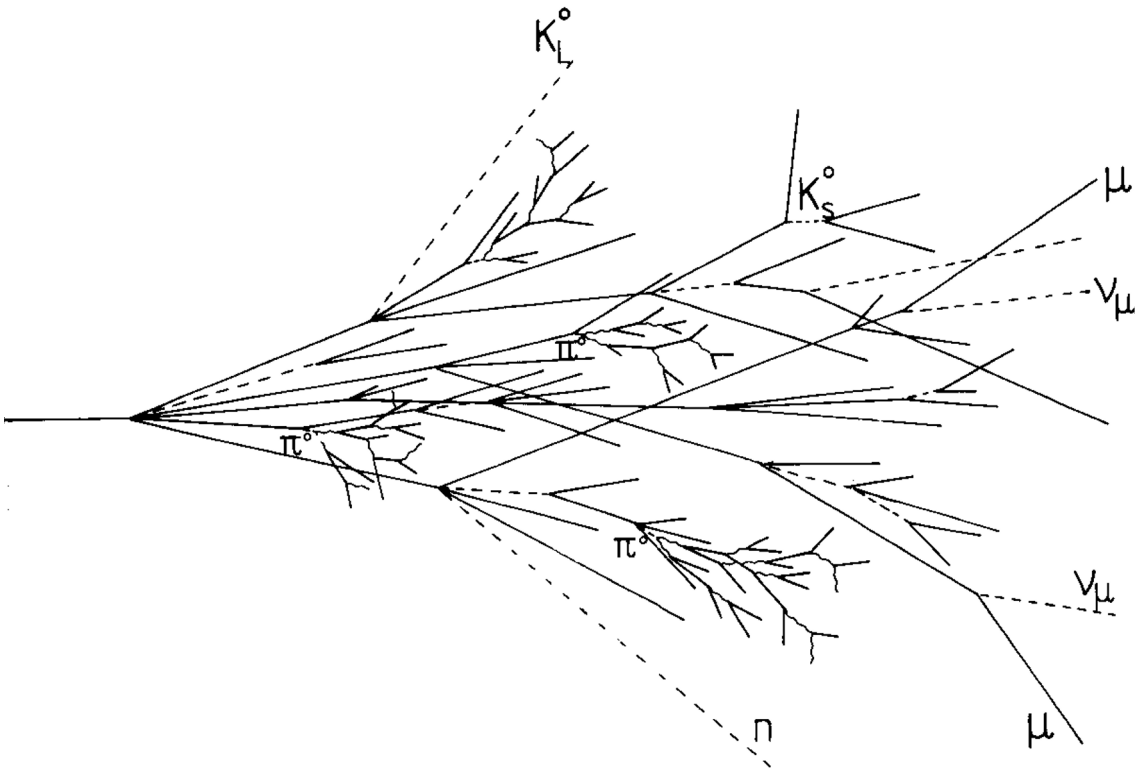
Aria	750 m
H_20	85 cm
C	38 cm
U	10.5 cm
Pb	17.1 cm

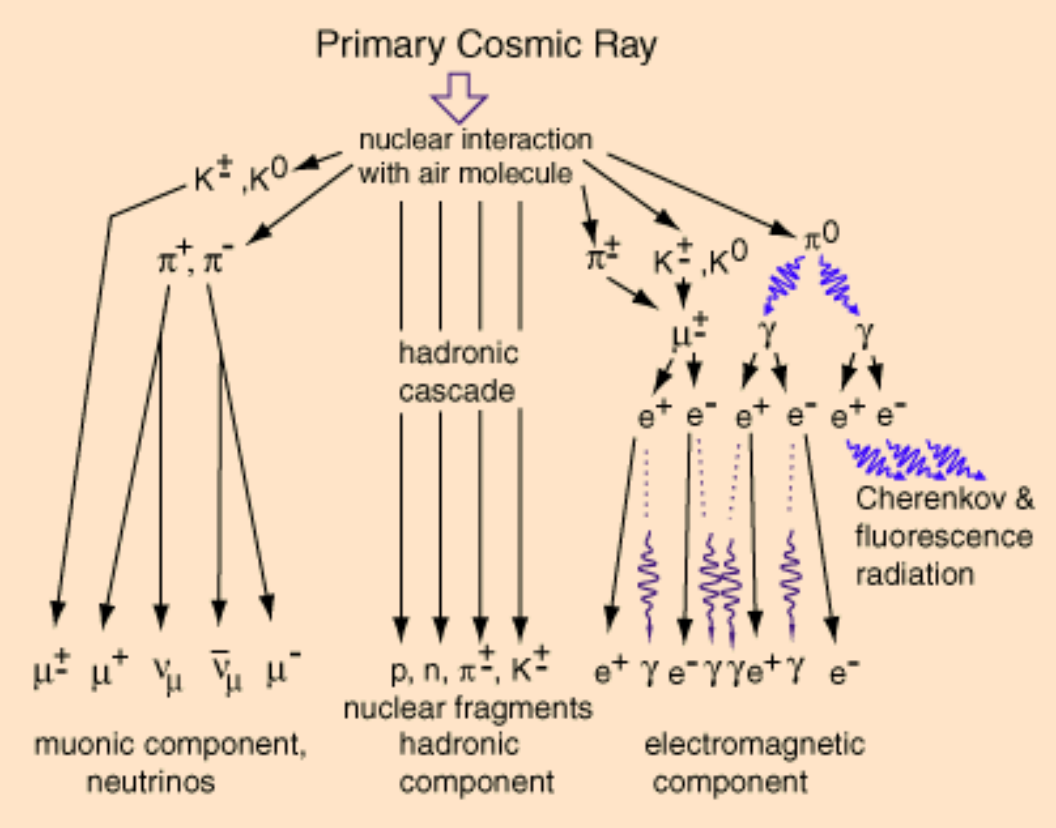
Cascate adroniche

Molti processi coinvolti → molto più complicate che gli sciami e.m. e più estese ($\lambda_I > X_0$)

p_T ~ 350 MeV → sciami adronici molto più larghi di quelli e.m. (95% in un cilindro di raggio λ_I)

- Componente adronica: p, π, K carichi, neutroni, frammenti nucleari
- Componente muonica, neutrini da decadimenti di π e K
- Componente e.m. originata da $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ → sciame e.m.

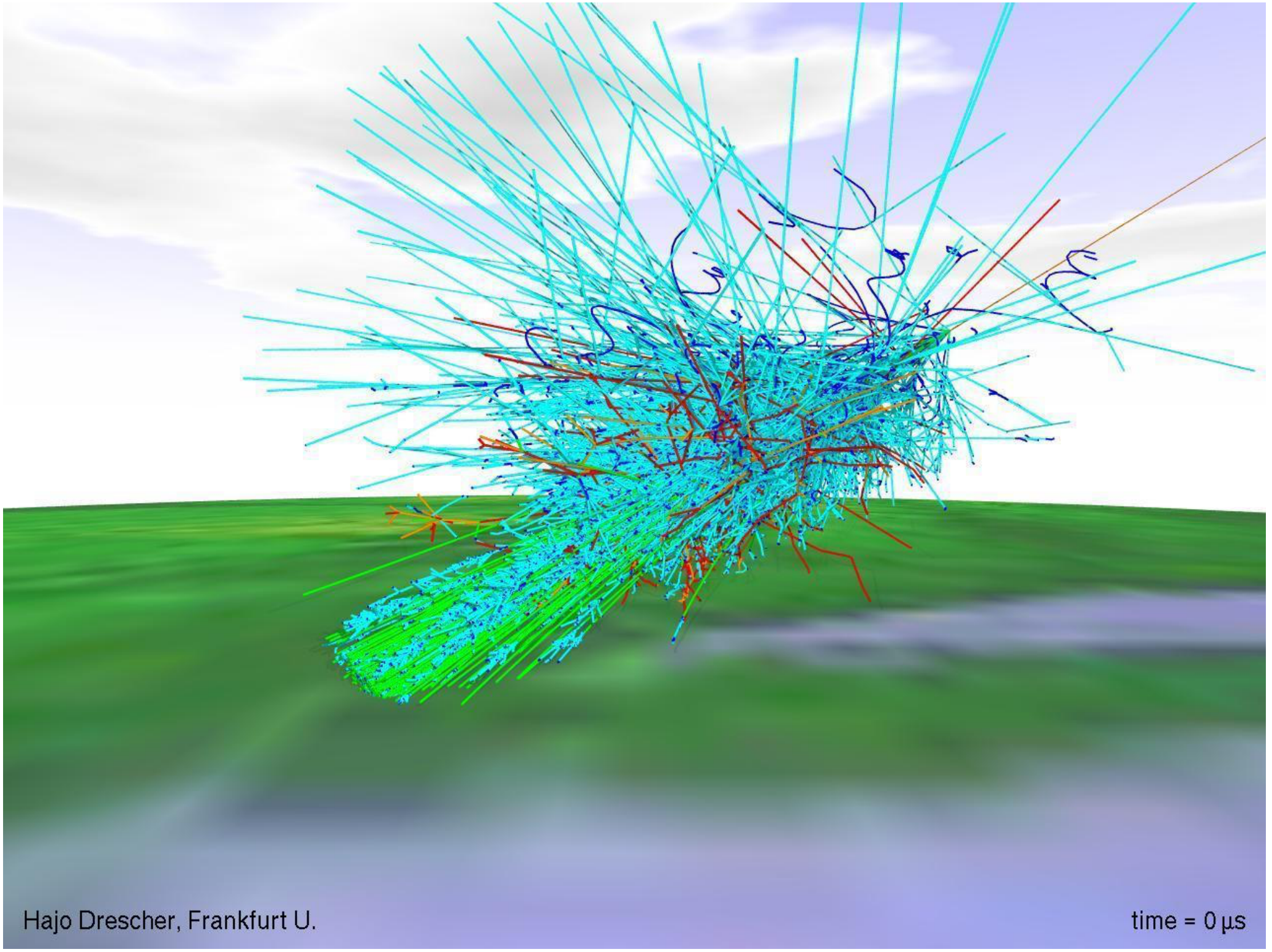


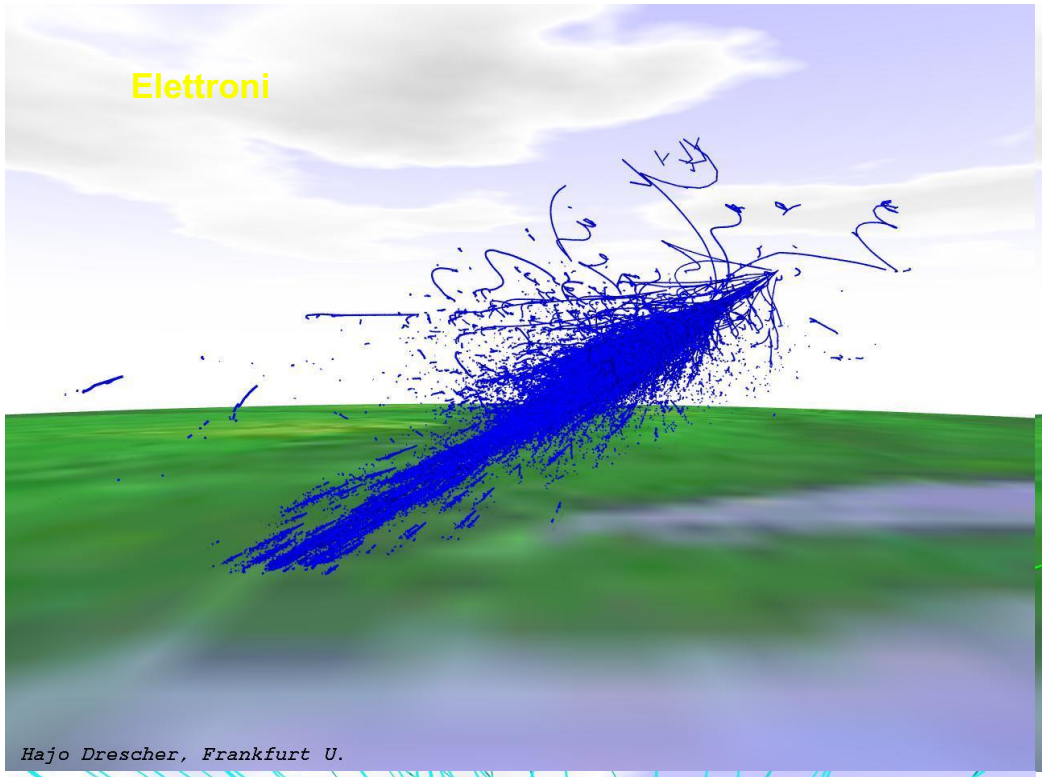


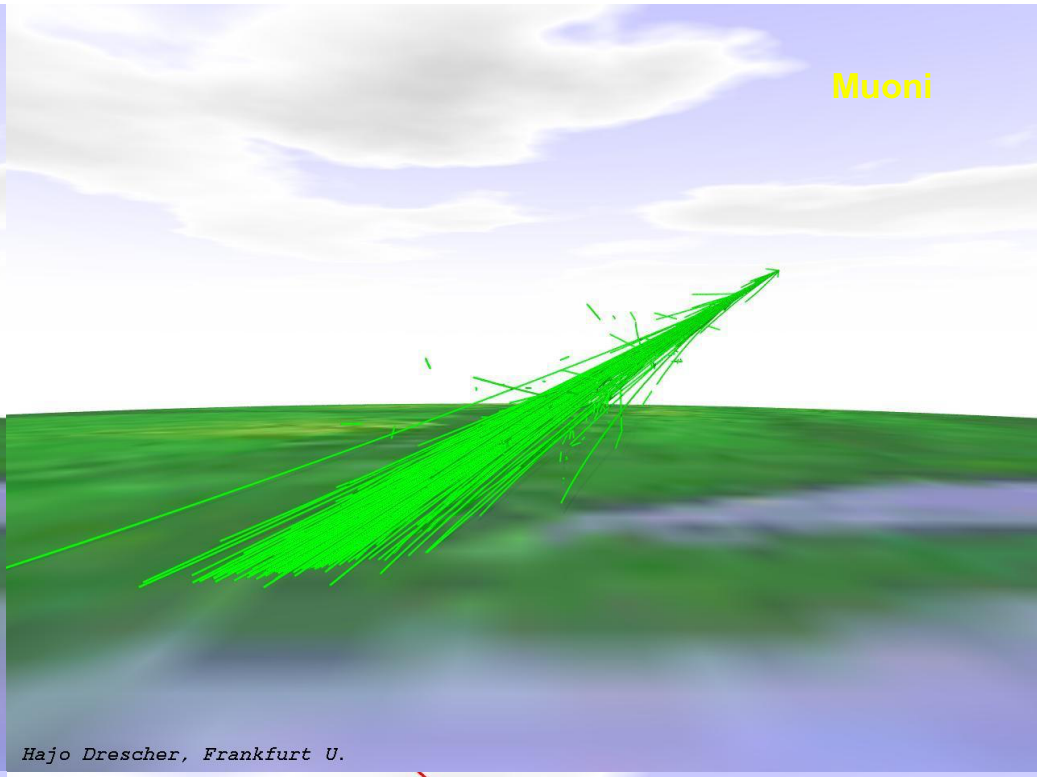
L'energia dell'adrone iniziale va per il 40-60% in sciame e.m. (~ log E_0, con grandi fluttuazioni)

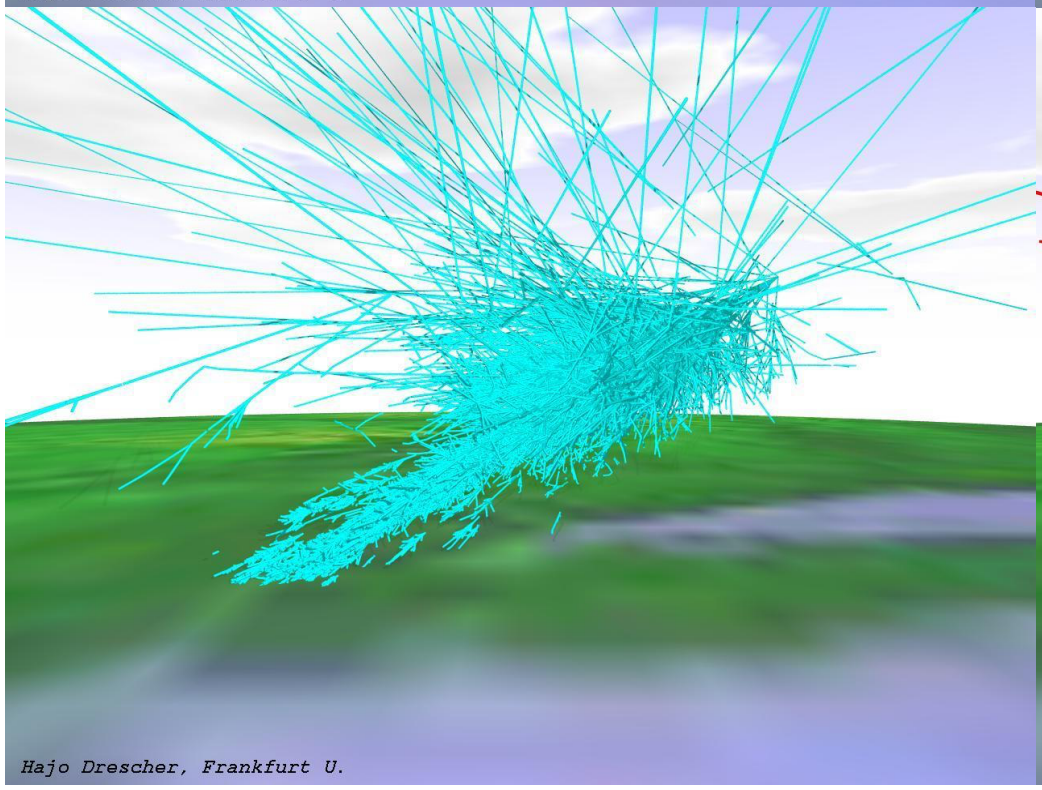
La frazione di energia non e.m. è così suddivisa:

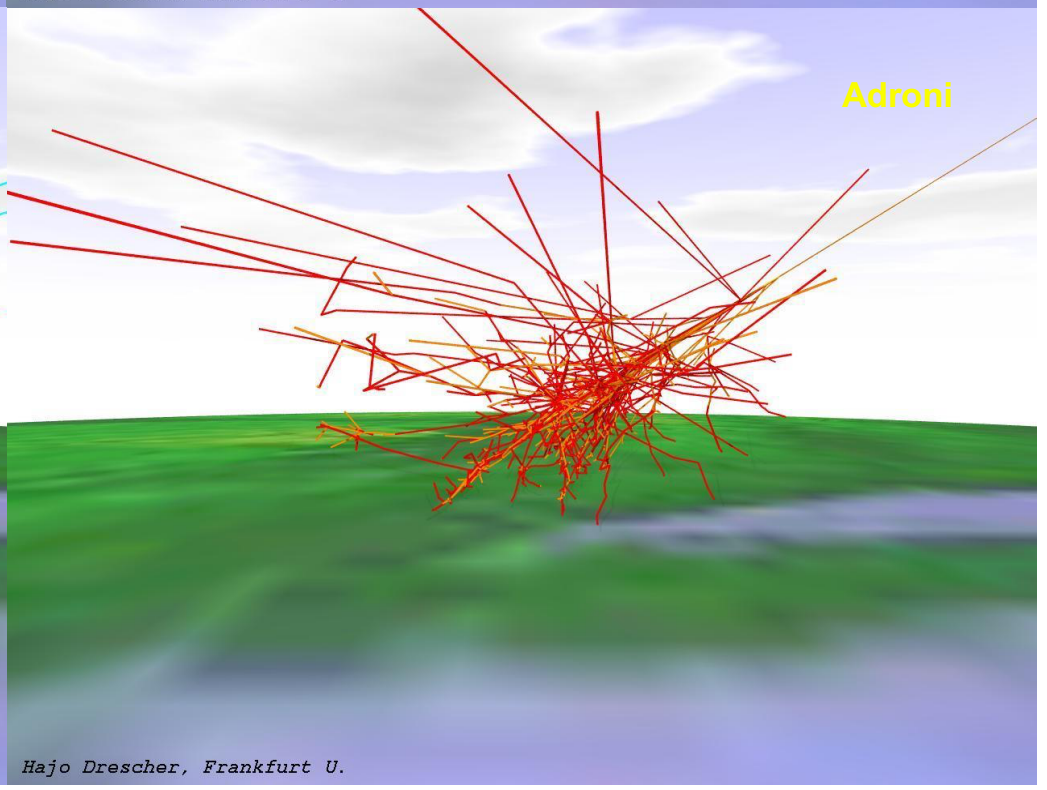
- Ionizzazione di pioni, protoni, muoni ~50%
- Invisibile (nuclei recoil, breaking up, binding energy) ~35%
- Energia cinetica di neutroni di evaporazione (molto penetranti) ~10%
- Neutrini da decadimento di π e K ~5%


Hajo Drescher, Frankfurt U.
time = 0 µs


Elettroni
Hajo Drescher, Frankfurt U.


Muoni
Hajo Drescher, Frankfurt U.


Hajo Drescher, Frankfurt U.


Adroni
Hajo Drescher, Frankfurt U.

6. ATOMIC AND NUCLEAR PROPERTIES OF MATERIALS

Table 6.1 Abridged from `pdg.lbl.gov/AtomicNuclearProperties` by D.E. Groom (2015). See web pages for more detail about entries in this table and for several hundred other substances. Parentheses in the dE/dx and density columns indicate gases at 20° C and 1 atm. Boiling points are at 1 atm. Refractive indices n are evaluated at the sodium D line blend (589.2 nm); values $\gg 1$ in brackets indicate $(n-1)\times 10^6$ for gases at 0° C and 1 atm.

Material	Z	A	$\langle Z/A\rangle$	Nucl.coll. length λ_T {g cm^{-2}}	Nucl.inter. length λ_I {g cm^{-2}}	Rad.len. X_0 {g cm^{-2}}	$dE/dx\|_{\rm min}$ { MeV g^{-1}cm^2}	Density {g cm^{-3}} ({gℓ^{-1}})	Melting point (K)	Boiling point (K)	Refract. index @ Na D
H_2	1	1.008(7)	0.99212	42.8	52.0	63.04	(4.103)	0.071(0.084)	13.81	20.28	1.11[132.]
D_2	1	2.01410177803(8)	0.49650	51.3	71.8	125.97	(2.053)	0.169(0.168)	18.7	23.65	1.11[138.]
He	2	4.002602(2)	0.49967	51.8	71.0	94.32	(1.937)	0.125(0.166)		4.220	1.02[35.0]
Li	3	6.94(2)	0.43221	52.2	71.3	82.78	1.639	0.534	453.6	1615.	
Be	4	9.0121831(5)	0.44384	55.3	77.8	65.19	1.595	1.848	1560.	2744.	
C diamond	6	12.0107(8)	0.49955	59.2	85.8	42.70	1.725	3.520			2.42
C graphite	6	12.0107(8)	0.49955	59.2	85.8	42.70	1.742	2.210			
N_2	7	14.007(2)	0.49976	61.1	89.7	37.99	(1.825)	0.807(1.165)	63.15	77.29	1.20[298.]
O_2	8	15.999(3)	0.50002	61.3	90.2	34.24	(1.801)	1.141(1.332)	54.36	90.20	1.22[271.]
F_2	9	18.998403163(6)	0.47372	65.0	97.4	32.93	(1.676)	1.507(1.580)	53.53	85.03	[195.]
Ne	10	20.1797(6)	0.49555	65.7	99.0	28.93	(1.724)	1.204(0.839)	24.56	27.07	1.09[67.1]
Al	13	26.9815385(7)	0.48181	69.7	107.2	24.01	1.615	2.699	933.5	2792.	
Si	14	28.0855(3)	0.49848	70.2	108.4	21.82	1.664	2.329	1687.	3538.	3.95
Cl_2	17	35.453(2)	0.47951	73.8	115.7	19.28	(1.630)	1.574(2.980)	171.6	239.1	[773.]
Ar	18	39.948(1)	0.45059	75.7	119.7	19.55	(1.519)	1.396(1.662)	83.81	87.26	1.23[281.]
Ti	22	47.867(1)	0.45961	78.8	126.2	16.16	1.477	4.540	1941.	3560.	
Fe	26	55.845(2)	0.46557	81.7	132.1	13.84	1.451	7.874	1811.	3134.	
Cu	29	63.546(3)	0.45636	84.2	137.3	12.86	1.403	8.960	1358.	2835.	
Ge	32	72.630(1)	0.44053	86.9	143.0	12.25	1.370	5.323	1211.	3106.	
Sn	50	118.710(7)	0.42119	98.2	166.7	8.82	1.263	7.310	505.1	2875.	
Xe	54	131.293(6)	0.41129	100.8	172.1	8.48	(1.255)	2.953(5.483)	161.4	165.1	1.39[701.]
W	74	183.84(1)	0.40252	110.4	191.9	6.76	1.145	19.300	3695.	5828.	
Pt	78	195.084(9)	0.39983	112.2	195.7	6.54	1.128	21.450	2042.	4098.	
Au	79	196.966569(5)	0.40108	112.5	196.3	6.46	1.134	19.320	1337.	3129.	
Pb	82	207.2(1)	0.39575	114.1	199.6	6.37	1.122	11.350	600.6	2022.	
U	92	[238.02891(3)]	0.38651	118.6	209.0	6.00	1.081	18.950	1408.	4404.	

http://pdg.lbl.gov/2016/reviews/rpp2016-rev-atomic-nuclear-prop.pdf

Air (dry, 1 atm)	0.49919	61.3	90.1	36.62	(1.815)	(1.205)		78.80	[289]
Shielding concrete	0.50274	65.1	97.5	26.57	1.711	2.300			
Borosilicate glass (Pyrex)	0.49707	64.6	96.5	28.17	1.696	2.230			
Lead glass	0.42101	95.9	158.0	7.87	1.255	6.220			
Standard rock	0.50000	66.8	101.3	26.54	1.688	2.650			
Methane (CH_4)	0.62334	54.0	73.8	46.47	(2.417)	(0.667)	90.68	111.7	[444.]
Ethane (C_2H_6)	0.59861	55.0	75.9	45.66	(2.304)	(1.263)	90.36	184.5	
Propane (C_3H_8)	0.58962	55.3	76.7	45.37	(2.262)	0.493(1.868)	85.52	231.0	
Butane (C_4H_{10})	0.59497	55.5	77.1	45.23	(2.278)	(2.489)	134.9	272.6	
Octane (C_8H_{18})	0.57778	55.8	77.8	45.00	2.123	0.703	214.4	398.8	
Paraffin ($CH_3(CH_2)_{n\approx 23}CH_3$)	0.57275	56.0	78.3	44.85	2.088	0.930			
Nylon (type 6, 6/6)	0.54790	57.5	81.6	41.92	1.973	1.18			
Polycarbonate (Lexan)	0.52697	58.3	83.6	41.50	1.886	1.20			
Polyethylene ($[CH_2CH_2]_n$)	0.57034	56.1	78.5	44.77	2.079	0.89			
Polyethylene terephthalate (Mylar)	0.52037	58.9	84.9	39.95	1.848	1.40			
Polyimide film (Kapton)	0.51264	59.2	85.5	40.58	1.820	1.42			
Polymethylmethacrylate (acrylic)	0.53937	58.1	82.8	40.55	1.929	1.19			1.49
Polypropylene	0.55998	56.1	78.5	44.77	2.041	0.90			
Polystyrene ($[C_6H_5CHCH_2]_n$)	0.53768	57.5	81.7	43.79	1.936	1.06			1.59
Polytetrafluoroethylene (Teflon)	0.47992	63.5	94.4	34.84	1.671	2.20			
Polyvinyltoluene	0.54141	57.3	81.3	43.90	1.956	1.03			1.58
Aluminum oxide (sapphire)	0.49038	65.5	98.4	27.94	1.647	3.970	2327.	3273.	1.77
Barium flouride (BaF_2)	0.42207	90.8	149.0	9.91	1.303	4.893	1641.	2533.	1.47
Bismuth germanate (BGO)	0.42065	96.2	159.1	7.97	1.251	7.130	1317.		2.15
Carbon dioxide gas (CO_2)	0.49989	60.7	88.9	36.20	1.819	(1.842)			[449.]
Solid carbon dioxide (dry ice)	0.49989	60.7	88.9	36.20	1.787	1.563	Sublimes at 194.7 K		
Cesium iodide (CsI)	0.41569	100.6	171.5	8.39	1.243	4.510	894.2	1553.	1.79
Lithium fluoride (LiF)	0.46262	61.0	88.7	39.26	1.614	2.635	1121.	1946.	1.39
Lithium hydride (LiH)	0.50321	50.8	68.1	79.62	1.897	0.820	965.		
Lead tungstate ($PbWO_4$)	0.41315	100.6	168.3	7.39	1.229	8.300	1403.		2.20
Silicon dioxide (SiO_2, fused quartz)	0.49930	65.2	97.8	27.05	1.699	2.200	1986.	3223.	1.46
Sodium chloride (NaCl)	0.47910	71.2	110.1	21.91	1.847	2.170	1075.	1738.	1.54
Sodium iodide (NaI)	0.42697	93.1	154.6	9.49	1.305	3.667	933.2	1577.	1.77
Water (H_2O)	0.55509	58.5	83.3	36.08	1.992	1.000	273.1	373.1	1.33
Silica aerogel	0.50093	65.0	97.3	27.25	1.740	0.200	(0.03 H_2O, 0.97 SiO_2)		