Università degli Studi di Siena

Corso di Laurea FTA - A.A. 2020/2021

Fisica Nucleare e subnucleare

Prova scritta del 23/9/2021

1) La particella $N(1900)^+$ ha $J^P = (3/2)^+$ e isospin 1/2, decade secondo lo schema $N(1900)^+ \rightarrow \Delta(1232)^+ \pi^0$.
Spiegare se il decadimento è mediato dall'interazione forte e perché.
Quali sono i possibili valori del momento angolare L del moto relativo delle due particelle dello stato finale?
Quanto vale l'impulso del pione nel sistema del centro di massa?

2) Il radon ^{220}Rn decade α in ^{216}Po con un tempo di dimezzamento di 51.5 s.
Il polonio decade a sua volta α con un tempo di dimezzamento 145 ms.
Calcolare come varia nel tempo l'attività di una sorgente costituita inizialmente da 1 μg di radon puro. Quanto vale l'attività dopo che sono trascorsi 10 minuti?

3) Un acceleratore lineare accelera nuclei di ^{16}O (massa 14895 MeV/c^2) fino ad una energia cinetica di 100 MeV, usando una tensione alternata a radiofrequenza con frequenza f = 100 MHz.
a) Quanto vale la lunghezza dell'ultimo tubo dell'acceleratore?
b) Se i tubi di accelerazione sono N=1000, quanto vale l'ampiezza massima della tensione alternata?
c) Se si volessero accelerare i nuclei di ^{16}O fino alla stessa energia in un ciclotrone che utilizza una radiofrequenza a 10 MHz , quali valori del campo magnetico B e del raggio R dei dischi si dovrebbero scegliere?

1) $N^+(1900)$ $J^P = \frac{3}{2}^+$ $I = \frac{1}{2}$ $I_3 = +\frac{1}{2}$

$\Delta^+(1232)$ $J^P = \frac{3}{2}^+$ $I = \frac{3}{2}$ $I_3 = +\frac{1}{2}$

π^0 $m_\pi = 135\ \mathrm{MeV}/c^2$ $J^P = 0^-$ $I = 1$ $I_3 = 0$

$I_{ini} = \frac{1}{2}$ $\left|\frac{3}{2}-1\right| \leq I_{fin} \leq \frac{3}{2}+1$ $I_3^{fin} = \frac{1}{2} = I_3^{ini}$

$\frac{1}{2} \leq I_{fin} \leq \frac{5}{2}$

L'ISOSPIN si conserva $\Rightarrow$ int. forte.

$J^{ini} = J^{fin}$ conserv. momento angolare totale

$J^{ini} = \frac{3}{2}$

$$\bar{J}^{fin} = \underset{0}{\bar{J}_\pi} + \underset{3/2}{\bar{J}_\Delta} + \bar{L} \Rightarrow \left|L-\frac{3}{2}\right| \leq J^{fin} \leq L+\frac{3}{2}$$

Affinché $J^{fin} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $L = 0, 1, 2, 3$

Nell'int. forte si deve conservare anche la parità

$$P_{ini} = +1 = P_{fin} = P_\pi P_\Delta (-1)^L = -1 \cdot (+1) \cdot (-1)^L$$

$\Rightarrow$ $L = 1$ oppure 3

Nel CM, dalla conservazione del 4-impulso

$$M_N^2 = p_N^2 = (p_\pi + p_\Delta)^2 = p_\pi^2 + p_\Delta^2 + 2\, p_\pi \cdot p_\Delta = m_\pi^2 + m_\Delta^2 + 2E_\pi E_\Delta - 2\bar{p}_\pi \cdot \bar{p}_\Delta$$

inoltre $\bar{p}_\pi + \bar{p}_\Delta = 0$ $\bar{p}_\Delta = -\bar{p}_\pi$

$M_N = E_\pi + E_\Delta$ $E_\Delta = M_N - E_\pi$

$$M_N^2 = m_\pi^2 + m_\Delta^2 + 2E_\pi(M_N - E_\pi) + 2|\bar{p}_\pi|^2 = m_\pi^2 + m_\Delta^2 + 2E_\pi M_N - 2m_\pi^2$$

$$E_\pi = \frac{M_N^2 - m_\Delta^2 + m_\pi^2}{2M_N} = \frac{1900^2 - 1232^2 + 135^2}{2 \cdot 1900} = 555.4\ \mathrm{MeV} \Rightarrow |\bar{p}_\pi| = 538.7\ \frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

2) $$\frac{dN_{Rn}}{dt} = -\lambda_{Rn} N_{Rn} \Rightarrow N_{Rn}(t) = N^0_{Rn}\, e^{-\lambda_{Rn} t}$$

$$N^0_{Rn} = \frac{10^{-6}\,g}{220} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 2.74 \cdot 10^{15}$$

$$\lambda_{Rn} = \frac{\ln 2}{T^{Rn}_{1/2}} = \frac{\ln 2}{51.5} = 0.01346\ s^{-1}$$

$$\frac{dN_{Po}}{dt} = -\lambda_{Po} N_{Po} + \lambda_{Rn} N_{Rn} = -\lambda_{Po} N_{Po} + \lambda_{Rn} N^0_{Rn}\, e^{-\lambda_{Rn} t} \quad (*)$$

$N_{Po}(t) = C\, e^{-\lambda_{Po} t}$ soluzione equ. omogenea $\dot{N}_{Po} = -\lambda_{Po} N_{Po}$

Soluz. particolare di (*) $\quad A\, e^{-\lambda_{Rn} t}$

Sostituendo in (*) $\Rightarrow A = \dfrac{\lambda_{Rn} N^0_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}}$

Soluz. generale

$$N_{Po}(t) = C\, e^{-\lambda_{Po} t} + A\, e^{-\lambda_{Rn} t}$$

$$N_{Po}(0) = 0 \Rightarrow C = -A$$

$$N_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N^0_{Rn} \left(e^{-\lambda_{Rn} t} - e^{-\lambda_{Po} t} \right) \qquad \lambda_{Po} = \frac{\ln 2}{T^{Po}_{1/2}} = 4.78\ s^{-1}$$

L'attività della sorgente è $A(t) = N_{Po}(t)\lambda_{Po} + N_{Rn}(t)\lambda_{Rn}$

Per $t = 10\ min = 600\ s \quad A(10\ min) = 2{,}23 \cdot 10^{11}\ Bq$

3) La condizione di accelerazione nei tubi di un LINAC è

$$L_i = v_i \frac{T}{2}$$

i = i-esimo tubo
v_i = velocità delle particelle all'i-esimo tubo
T = periodo della radiofrequenza $= \frac{1}{f}$

$$L_i = \beta_i c \frac{1}{2f}$$

$f = 10^2\ MHz$

$c = 3 \cdot 10^8\ m/s$

$$E_k = 100\ MeV = (\gamma - 1) m_0 \qquad m_0 = 14895\ MeV/c^2$$

$$\gamma = 1 + \frac{m_0}{E_k} = 1.00671 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.115$$

All'ultimo tubo$_L$ $\beta = 0.115$

$$L_L = \frac{\beta c}{2f} = 0.173\ m$$

L_i è legato anche all'ampiezza max V della corrente alternata

$q = 8e$ è la carica di ^{16}O

$$L_i = \sqrt{N \frac{2qV}{m_0}}\ \frac{T}{2}$$

$$L_i^2 = \frac{N 2qV}{m_0} \frac{1}{4f^2}$$

$$V = \frac{L_i^2\, 4 f^2 m_0}{2qN} = \frac{0.173^2 \cdot 2 \cdot (10^8)^2 \cdot 14895 \frac{MeV}{c^2}}{2 \cdot 8e \cdot 10^3} =$$

$$= \frac{0.173^2 \cdot 2 \cdot \cancel{10^{16}} \cdot 14895 \cdot 10^{\cancel{6}3}\ \cancel{e}V}{(3 \cdot \cancel{10^8})^2 \cdot 16\ \cancel{e} \cdot \cancel{10^3}} = 12383\ V$$

CICLOTRONE

$$m \frac{v^2}{R} = qBv \qquad mv = qBR$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2\pi m f}{q} = \frac{2\pi\ 14895 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ J/eV \cdot 10^7 Hz}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 8 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C} =$$

$$= 1{,}3\ Tesla$$

$$\frac{1}{2} m v_{MAX}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 = E_k^{MAX} = 100\ MeV$$

$$\omega = 2\pi f \qquad \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 R^2 = E_k^{MAX}$$

$$R = \left[\frac{2 E_k^{MAX}}{m}\right]^{1/2} \cdot \frac{1}{2\pi f} = \left[\frac{2 \cdot 100\ \cancel{MeV}}{14895\ \frac{\cancel{MeV}}{c^2}}\right]^{1/2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 10^7} =$$

$$= c\sqrt{\frac{200}{14895}}\ \frac{1}{2\pi \cdot 10^7} = \frac{3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 10^7} \sqrt{\frac{200}{14895}} = 0.55\ m$$