1) Calcolare il rapporto delle probabilità di decadimento $\dfrac{\Gamma\left(\rho^0 \to \pi^0\pi^0\right)}{\Gamma\left(\rho^0 \to \pi^+\pi^-\right)}$ in funzione delle ampiezze di isospin.

E' possibile arrivare allo stesso risultato utilizzando considerazioni legate ad altri principi di conservazione? Spiegare.

Soluzione

$$\frac{\rho^o \longrightarrow \pi^o\pi^o}{\rho^o \longrightarrow \pi^+\pi^-}$$

La ρ^o fa parte di un tripletto di isospin ed ha terza componente nulla: $I(\rho^o) = |1,0>$ mentre per i pioni abbiamo: $I(\pi^+) = |1,1>, \pi^o = |1,0>, \pi^- = |1,-1>$. Per sapere se il decadimento può avvenire o no verifichiamo che lo stato iniziale possa essere espresso come somma degli stati finali:

$$|\rho>= -\frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1>|1,1> + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1>|1,-1> + 0|1,0>|1,0> .$$

Da questa espressione otteniamo:

$$<\pi^-,\pi^+|\rho>= -\frac{1}{\sqrt{2}}A(\pi^-,\pi^+)$$
$$<\pi^+,\pi^-|\rho>= \frac{1}{\sqrt{2}}A(\pi^+,\pi^-)$$
$$<\pi^o,\pi^o|\rho>= 0$$

Per prima cosa possiamo quindi notare come il decadimento $\rho^o \to \pi^o\pi^o$ non avvenga poichè non si può costruire uno stato di isospin $|1,0>$ partendo da due stati $|1,0>$. Dobbiamo adesso valutare il valore di $\rho^o \to \pi^+\pi^-$ per capire se il rapporto vale 0 od è indeterminato. Dobbiamo sommare le due ampiezze:

$$\Gamma(\rho^o \to \pi^+\pi^-) \propto (-\frac{1}{\sqrt{2}}A(\pi^-,\pi^+) + \frac{1}{\sqrt{2}}A(\pi^+,\pi^-))^2$$

Le due ampiezze sono identiche ma differiscono dall'ordine dei pioni. Per poterle sommare dobbiamo invertire l'ordine dei pioni in una delle due ampiezze: questa operazione è analoga all'operazione di parità che inverte le coordinate:

$$A(\pi^-,\pi^+) = (-1)^L A(\pi^+,\pi^-)$$

Dopo questa operazione otteniamo:

$$\Gamma(\rho^o \to \pi^+\pi^-) \propto 2A^2(\pi^+,\pi^-).$$

Il rapporto vale quindi 0.

Il decadimento in due pi^0 non può avvenire anche perché viola la conservazione della C-parità

2) Quale energia deve avere un π^0 per produrre nel decadimento $\pi^0 \to \gamma\gamma$ fotoni con energia massima di 1 GeV (nel sistema del laboratorio) ? [Massa del pione M = 135 MeV/c^2]

Soluzione

Scriviamo l'espressione della massa invariante nel CM (*) per i due fotoni (indici 1 e 2)

$$M^2 = (p_1^* + p_2^*)^2 = \left(E_1^* + E_2^*, \overrightarrow{p_1^*} + \overrightarrow{p_2^*}\right)^2 = 2E_1^*E_2^* - 2\overrightarrow{p_1^*} \cdot \overrightarrow{p_2^*}$$

I fotoni nel CM (dove il pione è fermo) sono emessi a 180°. Inoltre i fotoni hanno massa nulla (E^2 - p^2=0), per cui riscriviamo

$$M^2 = 2E_1^*E_2^* - 2E_1^*E_2^* \cos 180° = 4E_1^*E_2^*$$

Inoltre nel CM si ha $\overrightarrow{p_1^*} + \overrightarrow{p_2^*} = 0$ da cui segue che $E_1^* = E_2^* = E^*$

$$M^2 = 4E^{*2}$$

$$E^* = \frac{M}{2}$$

Scriviamo ora l'energia di uno dei due fotoni nel LAB $E_1 = \gamma_{CM}\left(E^* + \beta_{CM} p^* \cos\theta^*\right)$

dove theta* è l'angolo formato nel CM dalla direzione di volo del fotone rispetto alla direzione di moto del CM.
Il moto del CM nel LAB coincide con il moto del pione, quindi

$$\gamma_{CM} = \frac{E_\pi}{M} \qquad \beta_{CM} = \frac{|\overrightarrow{p_\pi}|}{E_\pi} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - M^2}}{E_\pi}$$

Sostituendo queste espressioni nella formula di E_1 si ricava

$$E_1 = \frac{E_\pi}{M}\left(\frac{M}{2} + \frac{\sqrt{E_\pi^2 - M^2}}{E_\pi}\frac{M}{2}\cos\theta^*\right) = \frac{E_\pi}{2} + \frac{\sqrt{E_\pi^2 - M^2}}{2}\cos\theta^*$$

Il massimo valore di E_1 (= 2 GeV) si ha per theta* = 0, cioè fotone emesso in avanti nel CM, da cui si ha

$$E_1 = \frac{E_\pi}{2} + \frac{\sqrt{E_\pi^2 - M^2}}{2}$$

Svolgendo i calcoli si ricava l'energia del pione nel LAB, per avere massima energia di un fotone pari a 1 GeV

$$E_1 - \frac{E_\pi}{2} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - M^2}}{2}$$

$$4E_1^2 + E_\pi^2 - 4E_1E_\pi = E_\pi^2 - M^2$$

$$E_\pi = \frac{4E_1^2 + M^2}{4E_1} = E_1 + \frac{M^2}{4E_1^2} = 1 + \frac{0.135^2}{4}\,\textbf{GeV} = 1.00456\ \textbf{GeV}$$

3) Un fascio di muoni di impulso 500 MeV/c entra in una regione di campo magnetico uniforme e costante di intensità B=0.1 T e direzione ortogonale all'impulso delle particelle. Calcolare il raggio di curvatura iniziale delle particelle, e il raggio dopo un giro, supponendo che le particelle si propaghino in un mezzo materiale di densità 2×10^{-3} g/cm^3.
[Massa del muone m = 105 MeV/c^2]

4) I muoni si dispongono su una traiettoria circolare con raggio (in metri) dato da

$$R[m] = \frac{p[GeV]}{0.3B[T]} = 16.7\ m$$

L'energia delle particelle all'istante iniziale e'

$$E_0 = \sqrt{p_0^2 + m^2} = 511\ MeV$$

Il prodotto $\beta\gamma$ associato ai muoni all'istante iniziale e' pari a $\beta\gamma = p/m \simeq 5$ per cui possiamo assumere le perdite di energia al minimo di ionizzazione

$$\left(\frac{dE}{dx}\right) \simeq 2MeV/g/cm^2$$

Per effetto della ionizzazione dopo un giro i muoni perdono un'energia pari a

$$\Delta E = \left(\frac{dE}{dx}\right) \rho 2\pi R \simeq 42\ MeV$$

l'energia dei muoni dopo un giro sara' $E_1 = E_0 - \Delta E$ dunque l'impulso $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2} = 457\ MeV/c$ ed infine il raggio di curvatura $R_1 = 15.2\ m$.

4) L'energia di legame dei nuclei ${}^{4}_{2}He$ e ${}^{7}_{3}Li$ è 28.3 MeV e 39.3 MeV rispettivamente. Si consideri la reazione p + ${}^{7}_{3}Li \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$.

a) Verificare se la reazione è esotermica (Q > 0) o endotermica (Q < 0).

b) Indicare lo stato di spin-parità del nucleo ${}^{7}_{3}Li$.

c) Calcolare il valore del momento angolare orbitale iniziale, assumendo che quello finale sia nullo.

La reazione $p \ + \ {}^{7}_{3}Li \ \rightarrow \ {}^{4}_{2}He \ + \ {}^{4}_{2}He$ ha un Q-factor pari a:

$$Q = M_p + M_{Li} - 2M_\alpha = M_p + [3M_p + 4M_n - B({}^{7}_{3}Li)] - 2[2M_p + 2M_n - B(\alpha)] =$$

$$= 2B(\alpha) - B({}^{7}_{3}Li) = 2 \cdot 28.3 - 29.3 = 17.3 \ MeV \ \ > 0$$

Considerando il modell a shell, nel nucleo ${}^{7}_{3}Li$ sono occupate le seguenti shells:

$$p : (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^1$$

$$n : (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^2$$

Pertanto lo spin-parità sono determinati dalla shell incompleta dei protoni e risulta $J^P = (3/2)^-$.

Indicando i valori di spin-parità dei nuclei coinvolti nella reazione si ha:

$$p\left(\frac{1}{2}^+\right) \ + \ {}^{7}_{3}Li\left(\frac{3}{2}^-\right) \ \rightarrow \ {}^{4}_{2}He(0^+) \ + \ {}^{4}_{2}He(0^+)$$

Sapendo che il momento angolare orbitale dello stato finale è nullo, tale deve essere anche il momento angolare totale finale. Pertanto la conservazione del momento angolare impone:

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus L_i = 0$$

avendo indicato con $\oplus$ l'operazione di addizione dei momenti angolari e con L_i il momento angolare orbitale iniziale. Poiché $\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} = 1, 2$, ne segue che anche L_i può assumere i valori 1 o 2.

La conservazione della parità, a sua volta, impone che la parità dello stato iniziale sia uguale a quella finale, cioe' sia +1. Si ha allora:

$$P_i = P(p) \times P({}^{7}_{3}Li) \times P_{orb} = (+1) \times (-1) \times (-1)^{L_i}$$