3) In un anello di lunghezza 300 m è accelerato un fascio di anti-protoni di impulso 5 GeV/c e corrente 0.16 mA. Ad ogni giro il fascio attraversa un bersaglio di idrogeno gassoso di densità superficiale 10^{14} atomi/cm^2. Calcolare:
a) il campo magnetico dell'anello
b) la frequenza di rivoluzione degli anti-protoni
c) l'intensità e la luminosità del fascio
d) la sezione d'urto totale anti-protone protone se avvengono 1000 reazioni al secondo
e) in quanto tempo l'intensità del fascio si riduce al valore 1/e di quella iniziale, per effetto delle interazioni in targhetta
f) quale dovrebbe essere l'energia dei fasci, se si volesse ottenere la stessa energia nel centro di massa in un collisore protone anti-protone.

SOLUZIONE

a) L'impulso degli anti-protoni è legato al campo magnetico B (espresso in T) e al raggio dell'anello (espresso in m) dall'equazione

$$p = 0.3BR$$

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{300}{2\pi} = 47.77\ \mathbf{m}$$

$$B = \frac{p}{0.3\,R} = \frac{5}{0.3 \times 47.77} = 0.35\ \mathbf{T}$$

b) Per calcolare la frequenza di rivoluzione degli anti-protoni occorre prima calcolare il fattore di Lorentz

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} = \frac{\sqrt{5^2 + 0.938^2}}{0.938} = 5.42$$

$$\nu = \frac{qB}{2\pi m\gamma} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0.35}{2\pi \times 1.67 \times 10^{-27} \times 5.42} = 9.85 \times 10^5\ \mathbf{s}^{-1}$$

Nota che nel denominatore della formula la massa dell'anti-protone va espressa in unità di misura SI e non in GeV!

c) Calcoliamo l'intensità del fascio di antiprotoni dividendo la corrente per la carica elementare

$$I = \frac{i}{e} = \frac{0.16 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19}} = 10^{15}\ \mathbf{s}^{-1}$$

La luminosità è definita come $L = \phi N_b = \frac{I}{S} N_b = \frac{I}{S} n_b \Delta V = \frac{I}{S} n_b S \Delta x = I n_b \Delta x$

Dove Dx è lo spessore della targhetta e S la sezione del fascio
Ci viene fornita dal problema non la densità di particelle per unità di volume della targhetta ma la densità superficiale.
Le due grandezza sono legate dalla relazione

$$n_s = n_b \Delta x$$

da cui sostituendo $L = I n_b \Delta x = I n_s = 10^{15} \times 10^{14} = 10^{29}\ \mathbf{cm}^{-2}\ \mathbf{s}^{-1}$

d) Il numero di interazioni per unità di tempo è legato alla luminosità dalla relazione

$$\dot{N}_f = L\sigma$$

$$\sigma = \frac{\dot{N}_f}{L} = \frac{10^{3}}{10^{29}} = 10^{-26}\ \mathbf{cm}^{2} = 10^{-2}\ \mathbf{b} = 10\ \mathbf{mb}$$

e) Per effetto delle interazioni con i nuclei della targhetta, l'intensità del fascio si riduce secondo la legge

$$I = I_0 \exp\left(-\mu x\right)$$

$$\mu = n_b \sigma$$

$$\mu\, x = n_b\, \sigma\, k \Delta x = n_s\, \sigma\, k$$

Dove x è strato espresso in termini di k attraversamenti dello spessore della targhetta Deltax

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\,\mu x = -\,n_b\,\sigma\, k\Delta x = -\,n_s\,\sigma\, k$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{I_0}{I}\right)}{n_s\,\sigma} = \frac{1}{10^{14} \times 10^{-26}} = 10^{12}$$

Quindi la targhetta dovrà essere attraversata 10^{12} volte perché il fascio sia attenuato a 1/e.
Per calcolare il tempo necessario a compiere questo numero di giri, dividiamo il numero di giri per la frequenza di rivoluzione

$$t = kT = \frac{k}{\nu} = \frac{10^{12}}{9.85 \times 10^{5}} \simeq 10^{6}\,\mathbf{s}$$

f) Calcoliamo l'energia nel centro di massa nel caso di collisione fra anti-protoni accelerati e protoni fermi della targhetta

$$-p^2 + E^2 = -m_p^2$$

$$s = \left(E + m_p, \overrightarrow{p}\right)^2 = E^2 + m_p^2 + 2Em_p - p^2 = 2Em_p = 2m_p\sqrt{p^2 + m_p^2} = 2 \times 0.938 \times \sqrt{5^2 + 0.938^2} = 9.544\,\mathbf{GeV}^2$$

L'energia nel CM nel caso di collisore protone anti-protone è data da

$$s = \left(E_p^* + E_{\bar{p}}^*, \overrightarrow{0}\right) = \left(E_p^* + E_{\bar{p}}^*\right)^2 = 4E_p^{*2}$$

Dove avendo la stessa massa l'energia di protoni e anti-protoni è la stessa (l'impulso è nullo nel sistema CM). Uguagliando

$$4E_p^{*2} = 9.544$$

$$E_p^* = 1.545\,\mathbf{GeV}$$

2) Il trizio decade β^- in ^3He con tempo di dimezzamento di 12.33 anni. Un campione di idrogeno gassoso arricchito contiene 0.1 g di ^3H e produce 88 J/h a causa dell'assorbimento degli elettroni emessi nel decadimento del trizio.

a) Scrivere la formula del decadimento ;

b) Determinare l'energia media degli elettroni emessi nel decadimento;

c) Sapendo che l'energia massima degli elettroni emessi è 6.3 volte l'energia media, calcolare la differenza delle energie di legame dei due nuclei;

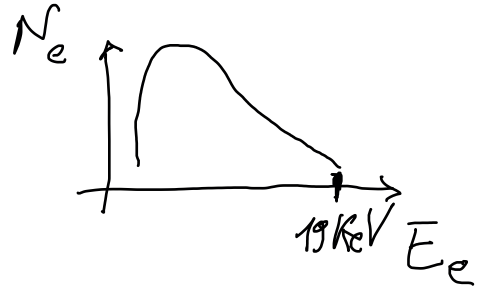
d) Determinare i valori di J^P dei due nuclei e il momento angolare dei leptoni prodotti nel decadimento.

$$^3H \longrightarrow {}^3_2He + e^- + \bar{\nu}_e$$

Soluzione

Ricaviamo il numero di atomi di trizio iniziali , assumendo come massa atomica 3 g

$$N_0 = \frac{N_A m}{M} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 0.1}{3} = 2 \cdot 10^{22}$$



La potenza dovuta all'assorbimento degli elettroni emessi nel decadimento del trizio è data da

$$P = \frac{N_0}{\tau} E_e \longleftarrow \text{energia media}$$

$$E_e = \frac{P\tau}{N_0} = \frac{88 \times 12.33 \times 365 \times 24}{2 \times 10^{22}} = 4.75 \times 10^{-16}\,\mathbf{J} = 3 \times 10^3\,\mathbf{eV} \simeq 3\ \text{keV}$$

dove E_e è l'energia media degli elettroni.

L'energia massima è 6.3 x 3 keV = 18.9 keV ~ 19 keV.

Il decadimento β^- del ^3H è

$$ {}^3_1H \rightarrow {}^3_2He + e^- + \bar{\nu}_e \longrightarrow J_{He} \quad J_{Lep} $$

$$ J \quad 1/2 \quad\quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad\quad 1/2 \quad 0;1 $$

$$ Q_\beta = M_{3H} - M_{3He} - M_e = \underbrace{T_{He}}_{\simeq 0} + T_e + T_\nu \approx T_e + T_\nu = T_e^{Max} = 19\ \mathrm{keV} $$

^3H: 2 neutroni $(1s_{1/2})^2$ 1 protone $(1s_{1/2})^1$ → $J^P = 1/2^+$
^3He: 1 neutrone $(1s_{1/2})^1$ 2 protoni $(1s_{1/2})^2$ → $J^P = 1/2^+$

Per la conservazione del momento angolare, i due leptoni possono avere **J_lep**=0, 1

Le masse dei nuclei di ^3H e ^3He sono date da
$M_{3H} = M_p + 2\,M_n - B(^3H)$
$M_{3He} = 2M_p + M_n - B(^3He)$
dove B è l'energia di legame nucleare.

Sottraendo la seconda equazione dalla prima
$M_{3H} - M_{3He} = -B(^3H) + B(^3He) - M_p + M_n$

Ma dal Q valore del decadimento sappiamo $M_{3H} - M_{3He} - M_e = T_e^{Max}$ che sostituita nella precedente dà

$$ T_e^{Max} + M_e = -B(^3H) + B(^3He) - M_p + M_n $$

da cui si ricava

$$ -B(^3H) + B(^3He) = T_e^{Max} + M_e + M_p - M_n = 19 + 511 + (938.27 - 939.56)\times 10^3 = -760\ \mathrm{keV} $$

1) Esprimere il rapporto delle sezioni d'urto per le reazioni $K^- p \to \pi^- \Sigma^+$ e $K^- p \to \pi^+ \Sigma^-$ in funzione delle due possibili ampiezze di isospin.

Quale valore assume il rapporto se una delle ampiezze è dominante ?
R:R=1

$$\frac{\sigma(K^- p \to \pi^- \Sigma^+)}{\sigma(K^- p \to \pi^+ \Sigma^-)}$$

$$\sigma \propto |\langle f | H_s | i \rangle|^2$$

$$\langle I^f I_3^f | H_s | I^i I_3^i \rangle = \delta_{I_3^f I_3^i} \delta_{I^f I^i} M_I$$

Isospin Totale delle 2 particelle

$$\begin{array}{cc} K: I \quad I_3 & p: I \quad I_3 \end{array}$$

$$|K^- p\rangle = |\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}; +\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|I=1; I_3=0\rangle + |I=0; I_3=0\rangle\right)$$

$$|\pi^- \Sigma^+\rangle = |1; -1\rangle |1; +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |I=2; I_3=0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |I=1; I_3=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |I=0; I_3=0\rangle$$

$$|\pi^+ \Sigma^-\rangle = |1; +1\rangle |1; -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |I=2; I_3=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |I=1; I_3=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |I=0; I_3=0\rangle$$

$$\langle \pi^- \Sigma^+ | H_s | K^- p\rangle = -\frac{1}{2} \langle I=1; I_3=0 | H_s | I=1; I_3=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} \langle I=0\ I_3=0 | H_s | I=0; I_3=0\rangle$$

$$= -\frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} M_0$$

$$\langle \pi^+ \Sigma^- | H_s | K^- p\rangle = +\frac{1}{2} \langle I=1; I_3=0 | H_s | I=1; I_3=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} \langle I=0; I_3=0 | H_s | I=0; I_3=0\rangle$$

$$= +\frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} M_0$$

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...
m_1 m_2		
m_1 m_2	Coefficients	
. .		

1/2×1/2

m_1	m_2	J=1, M=+1
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	J=1, M=0	J=0, M=0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=1, M=−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	3/2, +3/2
+1	+1/2	1

m_1	m_2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	3/2, −3/2
−1	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	3, +3
+2	+1	1

m_1	m_2	3, +2	2, +2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	3, +1	2, +1	1, +1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	3, 0	2, 0	1, 0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, −1	2, −1	1, −1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	3, −2	2, −2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	3, −3
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	2, +2
+1	+1	1

m_1	m_2	2, +1	1, +1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, 0	1, 0	0, 0
$\pi^+\Sigma^-$ → +1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
$\pi^-\Sigma^+$ → −1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	2, −1	1, −1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, −2
−1	−1	1

2×1/2

m_1	m_2	5/2, +5/2
+2	+1/2	1

m_1	m_2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	5/2, +1/2	3/2, +1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2, −1/2	3/2, −1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	5/2, −5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	2, +2
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	2, +1	1, +1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	2, 0	1, 0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, −1	1, −1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	2, −2
−3/2	−1/2	1

3/2×1

m_1	m_2	5/2, +5/2
+3/2	+1	1

m_1	m_2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2, +1/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	5/2, −1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2, −5/2
−3/2	−1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

3/2×3/2

m_1	m_2	3, +3
+3/2	+3/2	1

m_1	m_2	3, +2	2, +2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3, +1	2, +1	1, +1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, 0	2, 0	1, 0	0, 0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1	m_2	3, −1	2, −1	1, −1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, −2	2, −2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3, −3
−3/2	−3/2	1

2×3/2

m_1	m_2	7/2, +7/2
+2	+3/2	1

m_1	m_2	7/2, +5/2	5/2, +5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m_1	m_2	7/2, +3/2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1	m_2	7/2, +1/2	5/2, +1/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1	m_2	7/2, −1/2	5/2, −1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1	m_2	7/2, −3/2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1	m_2	7/2, −5/2	5/2, −5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m_1	m_2	7/2, −7/2
−2	−3/2	1

2×2

m_1	m_2	4, +4
+2	+2	1

m_1	m_2	4, +3	3, +3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m_1	m_2	4, +2	3, +2	2, +2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4, +1	3, +1	2, +1	1, +1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4, 0	3, 0	2, 0	1, 0	0, 0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1	m_2	4, −1	3, −1	2, −1	1, −1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4, −2	3, −2	2, −2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4, −3	3, −3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m_1	m_2	4, −4
−2	−2	1

$$d^1_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1) \qquad d^2_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

$$R = \frac{\sigma(K^- p \to \pi^- \Sigma^+)}{\sigma(K^- p \to \pi^+ \Sigma^-)} = \frac{-\frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} M_0}{\frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} M_0}$$

$M_1 \gg M_0 \qquad R = -1$

$M_1 \ll M_0 \qquad R = 1$

4) Un muone di energia 100 GeV penetra verticalmente in mare.

a) Può produrre luce Cerenkov? Spiegare.

b) In caso affermativo, qual è l'angolo di apertura del cono Cerenkov?

c) A che profondità il muone decade?

[Indice di rifrazione dell'acqua n = 1.33. Vita media del muone tau = 2.2×10^{-6} s. Massa del muone m = 105 MeV/c^2]

Soluzione

a) Viene emessa luce Cerenkov se

$$\beta > \frac{1}{n} = \frac{1}{1.33} = 0.75$$

dove beta è la velocità del muone. Un muone di energia totale 100 GeV è ultrarelativistico $\gamma = \frac{E}{m} = \frac{100\,\textbf{GeV}}{105\,\textbf{MeV}} \simeq 10^3$

quindi beta = 1, e la disuguaglianza di sopra è verificata. Il muone emette luce Cerenkov.

b) L'angolo di emissione Cerenkov è

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n} = \frac{1}{1.33} = 0.752 \qquad \theta = \arccos\left(0.752\right) = 41.2^\circ$$

c) La vita media del muone è dilatata relativisticamente per un osservatore solidale al laboratorio (mare)

$$T = \gamma\tau = 2.2 \times 10^{-3}\,\textbf{s}$$

$$d = cT = 3 \times 10^8 \times 2.2 \times 10^{-3} = 6.6 \times 10^5\,\textbf{m}$$

Quindi il muone decade nella crosta terrestre dato che la massima profondità degli oceani è circa 11000 m