1) In un esperimento, elettroni di impulso 600 MeV/c sono diffusi a 5° da un bersaglio di grafite (^{12}C, densità 2.2 g/cm^3), di spessore 0.1 mm. La corrente del fascio di elettroni è 1×10^{-6} A, Un rivelatore di area 1mm^2 posto a 1 m di distanza dal bersaglio, misura 750 conteggi al secondo.

a) Qual è la sezione d'urto differenziale misurata ?

b) Si confronti tale valore con la sezione d'urto Mott calcolata per lo scattering in questione.

c) Quanto vale l'impulso q trasferito nella reazione?

d) Qual è il fattore di forma nucleare che si calcola confrontando la sezioni d'urto sperimentale e teorica.

e) Si stimi il raggio quadratico medio $<r>^2$ del nucleo, utilizzando lo sviluppo in serie del fattore di forma nucleare.

Soluzione

a) La sezione d'urto differenziale si calcola come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{N}}{\Delta\Omega\, I\, n_b\, x}$$

dove

$$n_b = \rho \frac{N_A}{A} \qquad \Delta\Omega = \frac{S}{d^2} \qquad I = \frac{i}{1.6 \times 10^{-19}}$$

Sostituendo i valori numerici si trova

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \frac{\dot{N}}{\frac{S}{d^2} I \rho \frac{N_A}{A}\, x} = \frac{750}{\frac{10^{-6}}{1}\,\frac{10^{-6}}{1.6\,10^{-19}} \times 2.2 \frac{6.02\,10^{23}}{12} 10^{-2}} = 10.91 \times 10^{-26}\,\mathbf{cm}^2\,\mathbf{sr}^{-1} = 10.91\,\mathbf{fm}^2\,\mathbf{sr}^{-1}$$

b) La sezione d'urto differenziale calcolata con la formula di Mott è

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{Z^2\alpha^2\hbar^2c^2}{4E^2 sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{6^2\times 197^2\,\textbf{MeV}^2\textbf{fm}^2}{137^2\times 4\times 600^2\,\textbf{MeV}^2\times\sin^4\left(2.5^\circ\right)}\cos^2\left(2.5^\circ\right) = 14.28\,\textbf{fm}^2\textbf{sr}^{-1} = 14.28\times 10^{-26}\,\textbf{cm}^2\,\textbf{sr}^{-1} = 14.28\,\textbf{fm}^2\,\textbf{sr}^{-1}$$

c) L'impulso trasferito è

$$q = 2p\sin\frac{\theta}{2} = 2\times 600\sin 2.5^\circ = 52.34\,\textbf{MeV/c}$$

d) Il fattore di forma è il rapporto fra la sezione d'urto misurata e quella calcolata con la formula di Mott

$$|F(q^2)|^2 = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}} = \frac{10.91}{14.28} = 0.764$$

e) La formula che lega il fattore di forma al raggio quadratico medio è

$$F(q^2) = 1 - \frac{1}{6}\frac{q^2}{\hbar^2} < r^2 >$$

Da questa possiamo stimare il raggio quadratico medio

$$< r^2 > = \frac{6\hbar^2}{q^2}\left[1 - F(q^2)\right] = \frac{6\hbar^2c^2}{q^2c^2}\left[1 - F(q^2)\right] = \frac{6\times 197^2\,\textbf{MeV}^2\textbf{fm}^2}{52.34^2\,\textbf{MeV/c}^2c^2}\left[1 - \sqrt{0.764}\right] = 10.7\,\textbf{fm}^2$$

E quindi il raggio del nucleo

$$r \sim \sqrt{< r^2 >} = 3.27\,\textbf{fm}$$

2) Un fascio di muoni di impulso 400 MeV/c entra in una camera a vuoto in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante di intensità B = 0.3 T, con direzione ortogonale alla velocità delle particelle.

a) Che tipo di orbita percorrono le particelle? Qual è il suo raggio?

b) Lungo l'orbita viene inserito un setto di ferro (densità 7.9 g/cm^3) di spessore x. Determinare lo spessore x sapendo che dopo un giro, il raggio dell'orbita si riduce a 7/8 del raggio iniziale. Si trascuri il multiple scattering.

c) Se invece nel dispositivo viene fatto il vuoto e non è presente il setto di ferro, dopo quanti giri decade la metà dei muoni?

[Vita media del muone $\tau = 2.2\text{x}10^{-6}$ s; massa del muone m = 105 MeV/c^2]

SOLUZIONE

a) Il raggio dell'orbita circolare si calcola dalla formula $R(m) = \dfrac{p(GeV/c)}{0.3\,B(T)} = \dfrac{0.4}{0.3 \times 0.3} = 4.44$ **m**

b) La particella è al minimo di ionizzazione in quanto ha $\beta\gamma = \dfrac{p}{m} = \dfrac{400}{105} = 3.8$

Quindi la perdita specifica di energia si può approssimare come $\dfrac{dE}{dx} = 2$ **MeV cm^2/g**

Dopo un giro il raggio si sarà ridotto per effetto della perdita di energia e l'impulso dei muoni sarà

$$p_1 = 0.3\,B(T)\,R_1(m) = 0.3 \times 0.3 \times \frac{7}{8} 4.44 = 349.65 \text{ **MeV/c**}$$

$$E_1 = \sqrt{p_1^2 + m^2} = \sqrt{349.65^2 + 105^2} = 365.075 \text{ **MeV**}$$

Avendo calcolato l'energia E_1 dei muoni dopo avere attraversato il setto, la variazione di energia è

$$\Delta E = E - E_1 = 400 - 365.075 = 34.925 \text{ **MeV**}$$

$$\Delta E = \frac{dE}{dx} \rho x$$

$$x = \frac{\Delta E}{\frac{dE}{dx}\rho} = \frac{34.925}{2 \times 7.9} = 2.21 \text{**cm**}$$

c) Scriviamo la legge del decadimento nel sistema del laboratorio, dove si deve tenere conto della dilatazione relativistica della vita media

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\gamma\tau}\right)$$

Il tempo a cui metà dei muoni decade è $t_{12} = \gamma\tau \ln 2$

che corrisponde ad uno spazio percorso

$$L = \beta c t_{12} = \beta\gamma c\tau \ln 2 = 3.8 \times 3 \times 10^8 \times 2.2 \times 10^{-6} \ln 2 = 1738.4 \text{ m}$$

Il numero di giri si ottiene dividendo per la circonferenza

$$n = \frac{L}{2\pi R} = \frac{1738.4}{2 \times 3.14 \times 6.66} = 41.5$$

3) I neutrini solari furono rivelati per la prima volta nel 1978 attraverso la reazione

$$\nu_e + ^{37}_{17}Cl \rightarrow ^{37}_{18}Ar + e^-$$

Si calcoli la soglia della reazione, sapendo che i termini di Coulomb e di asimmetria della formula semiempirica di massa sono rispettivamente

A_C = 0.697 MeV e A_A = 93.2 MeV. [m_e = 0.511 MeV/c^2, m_p - m_n = -1.293 MeV/c^2]

3) La reazione considerata rientra in quella più generale:

$$\nu_e \; + \; (A,Z) \; \rightarrow \; (A,Z+1) \; + \; e^- \quad .$$

L'energia di soglia dei neutrini è:

$$E_{soglia} = \frac{(m_e + M')^2 - M^2}{2M} \quad , \tag{1}$$

avendo indicato con M e M' le masse dei nuclei (A,Z) e $(A,Z+1)$ rispettivamente. Tali masse si possono esprimere attraverso le energie di legame:

$$M = ZM_p + (A-Z)M_n - B(A,Z)/c^2$$

$$M' = (Z+1)M_p + (A-Z-1)M_n - B(A,Z+1)/c^2 = M + \Delta M \quad ,$$

essendo

$$\Delta M = (M_p - M_n) + \Delta B/c^2 \qquad \Delta B = B(A,Z) - B(A,Z+1) \quad .$$

Si può calcolare ΔB utilizzando la *formula semiempirica di massa* ed osservando che gli unici termini che non si elidono tra le due energie di legame sono quello Coulombiano e quello di asimmetria, poiché:

1. i termini di volume e di superficie dipendono solo da A, che rimane invariato,
2. A è dispari e quindi il termine di *pairing* è nullo in entrambi i nuclei.

Si ha allora:

$$\Delta B = -a_C\left\{\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{(Z+1)^2}{A^{1/3}}\right\} - a_A\left\{\frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{[A-2(Z+1)]^2}{A}\right\} = a_C\frac{2Z+1}{A^{1/3}} - 4a_S\frac{A-2Z-1}{A}$$

Nella reazione considerata abbiamo $A = 37$ e $Z = 17$ e pertanto la differenza di massa risulta:

$$\Delta M = -1.293 + 0.70 \times \frac{35}{37^{1/3}} - 4 \times 23.3 \times \frac{2}{37} \simeq 1 \; MeV \quad .$$

Sostituendo nella (??) si ottiene:

$$E_{soglia} = \frac{[m_e + (M + \Delta M)]^2 - M^2}{2M} = \frac{m_e(m_e + 2M) + \Delta M(2m_e + \Delta M + 2M)}{2M}$$

$$\simeq \; m_e + \Delta M \; \simeq \; 1.5 \; MeV \quad .$$