1) Consideriamo la reazione di produzione $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$, dove il positrone di energia E_0 incide su di un elettrone in quiete. Calcolare:

a) la soglia di produzione della reazione, cioè il minimo valore di E_0 per cui la reazione può avvenire;
b) l'energia e l'impulso dei pioni nel sistema del centro di massa (SCM) in funzione di E_0;
c) l'energia e il momento dei pioni nel sistema del laboratorio (SLAB) assumendo E_0 = 300 GeV e θ^*= 30°, dove θ^* è l'angolo a cui sono emessi i pioni nel SCM rispetto alla direzione di moto del centro di massa;
d) l'angolo massimo di apertura della coppia dei pioni nel sistema del laboratorio e le corrispondenti energie dei pioni, assumendo che sia E_0 che l'energia dei pioni siano >> delle masse delle particelle (Suggerimento: scrivere la conservazione del quadrimpulso in funzione dell'angolo di apertura della coppia θ definito come $\theta = \theta_1 + \theta_2$ dove θ_1 e θ_2 sono gli angoli di diffusione dei pioni nel SLAB).

[M_e = 0.511 MeV/c^2 ; M_π = 140 MeV/c^2]

Soluzione

a) La massa invariante della reazione è

$$s = E_{LAB}^2 = \left(E_0 + M_e, \overrightarrow{p}_{e^+}\right)^2 = 2M_e^2 + 2M_eE_0$$

Inoltre considerando lo stato finale a due pioni nel sistema del CM, abbiamo

$$s = E_{CM}^2 = \left(2E_\pi^*,0\right)^2 = 4E_\pi^{*2}$$

dove i due pioni hanno la stessa energia E* nel SCM perché hanno uguali masse e impulsi uguali in modulo e opposti di verso. Uguagliando le due espressioni otteniamo (A1)

$$2M_e^2 + 2M_eE_0 = 4E_\pi^{*2} = 4\left(T_\pi^* + M_\pi\right)^2$$

dove T* è l'enegia cinetica dei pioni nel sistema del CM.
L'energia di soglia è la minima energia E_0 per produrre i pioni fermi nel SCM, cioè

$$2M_e^2 + 2M_eE_0^{thr} = 4M_\pi^2$$

$$E_0^{thr} = \frac{2m_\pi^2 - M_e^2}{M_e} = 76.711 \times 10^3 \textbf{ MeV}$$

b) Usando la relazione (A1) otteniamo l'energia dei pioni nel SCM

$$E_\pi^* = \sqrt{\frac{M_e^2 + M_eE_0}{2}} \qquad p_\pi^* = \sqrt{E_\pi^{*2} - M_\pi^2}$$

c) Per ricavare l'impulso e l'energia nel sistema del LAB consideriamo le trasformazioni di Lorentz

$$p_T = p_T^*$$
$$p_L = p_L^* \gamma + \gamma \beta E^*$$
$$E = E\gamma + \gamma \beta p_L^*$$

dove T e L indicano l'impulso trasverso e longitudinale dei pioni, β è la velocità del CM nel sistema LAB (p_0 è l'impulso del positrone)

$$\beta = \frac{|\overrightarrow{p_0}|}{E_0 + M_e} = \frac{\sqrt{E_0^2 - M_e^2}}{E_0 + M_e} = 0.999998296 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 541.7$$

I pioni sono emessi back-to-back nel SCM su una linea di volo che forma un angolo θ*=30° rispetto alla direzione di β (che corrisponde alla direzione di moto del positrone, dato che l'elettrone è fermo)

$$E_\pi^* = \sqrt{\frac{M_e^2 + M_e E_0}{2}} = 276.85 \textbf{ MeV} \qquad p_\pi^* = \sqrt{E_\pi^{*2} - M_\pi^2} = 238.85 \textbf{ MeV/c}$$

Per il primo pione θ*=30°

$$p_T^* = p_\pi^* \sin\theta^* = 119.42 \textbf{ MeV/c}$$
$$p_L^* = p_\pi^* \cos\theta^* = 206.85 \textbf{ MeV/c}$$

$$p_T = p_T^* = 119.42 \textbf{ MeV/c}$$
$$p_L = p_L^* \gamma + \gamma \beta E^* = 262020 \textbf{ MeV/c}$$
$$E = E\gamma + \gamma \beta p_L^* = 262020 \textbf{ MeV}$$

Per il secondo pione θ*=180+30° = 210°

$$p_T^* = p_\pi^* \sin\theta^* = -119.42 \textbf{ MeV/c}$$
$$p_L^* = p_\pi^* \cos\theta^* = -206.85 \textbf{ MeV/c}$$

$$p_T = p_T^* = -119.42 \textbf{ MeV/c}$$
$$p_L = p_L^* \gamma + \gamma \beta E^* = 37919 \textbf{ MeV/c}$$
$$E = E\gamma + \gamma \beta p_L^* = 37919 \textbf{ MeV}$$

d) Calcoliamo s usando le variabili nel SLAB dei pioni

$$s = \left(E_{\pi^+} + E_{\pi^-}, \vec{p}_{\pi^+} + \vec{p}_{\pi^-}\right)^2 = 2M_\pi^2 + 2E_{\pi^+}E_{\pi^-} - 2\vec{p}_{\pi^+} \cdot \vec{p}_{\pi^-} = 2M_\pi^2 + 2E_{\pi^+}E_{\pi^-} - 2|\vec{p}_{\pi^+}||\vec{p}_{\pi^-}|\cos\theta$$

dove θ è l'angolo di apertura della coppia. Uguagliando questa espressione a quella ottenuta al punto a)

$$2M_e^2 + 2M_eE_0 = 2M_\pi^2 + 2E_{\pi^+}E_{\pi^-} - 2|\vec{p}_{\pi^+}||\vec{p}_{\pi^-}|\cos\theta$$

Considerando $E_0 >> M_e$ e $E_\pi >> M_\pi$ la relazione si semplifica

$$M_eE_0 = E_{\pi^+}E_{\pi^-}(1-\cos\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)E_{\pi^+}E_{\pi^-}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{M_eE_0}{2E_{\pi^+}E_{\pi^-}}$$

e usando la conservazione dell'energia $E_0 = E_{\pi^+} + E_{\pi^-}$ si ricava

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{M_eE_0}{2E_{\pi^+}\left(E_0 - E_{\pi^+}\right)}$$

Per trovare l'angolo max deriviamo rispetto a $E_{\pi+}$ (E_0 è fissato)

$$\frac{d\left(\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{dE_{\pi^+}} = \frac{-2M_eE_0\left(-2E_{\pi^+} + E_0\right)}{\left[4E_{\pi^+}\left(E_{\pi^+} - E_0\right)\right]^2}$$

Che si annulla per $E_{\pi^+} = \frac{1}{2}E_0$

In corrispondenza di cui si ha un max $\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) = \frac{M_e}{E_0}$ $\qquad \theta_{max} = 2\arcsin\sqrt{\frac{M_e}{E_0}} = 8.57°$

2) Un fascio di protoni di impulso 5 GeV/c e corrente 20 μA viene monitorato con un contatore a ionizzazione, che si può schematizzare come una cella di spessore 2 cm contenente un gas di densità 1.5x10^{-3} g/cm^3. Quale corrente misura il contatore, sapendo che l'energia per la produzione di una coppia elettrone-ione è 30 eV.

Soluzione

I protoni hanno $\beta\gamma = \frac{p}{m_p} = 5.33$

quindi la loro perdita di energia per ionizzazione è vicina a quella minima (che ha per beta-gamma ~3-4). Possiamo assumere

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} = 2 \textbf{ MeV cm/g}$$

L'energia persa in 2 cm di gas da un protone è $\Delta E = \rho \left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} \Delta x = 0.006$ **MeV**

e quindi il numero di coppie elettrone-ione prodotte da un protone interagente nel gas

$$n = \frac{\Delta E}{w} = 200$$

La corrente nel contatore si ottiene come $i = Ine$

dove I è l'intensità del fascio, e la carica elementare. I si ricava dalla corrente del fascio

$$I = \frac{i_{beam}}{e} = \frac{20 \times 10^{-6}}{1.6 \times 10^{-19}} = 12.5 \times 10^{13} \textbf{ s}^{-1}$$

$$i = \frac{i_{beam}}{e} ne = i_{beam} n = 4 \times 10^{-3} \textbf{ A}$$

3) Stabilire quali fra le seguenti reazioni e decadimenti sono permessi e quali sono proibiti sulla base delle leggi di conservazione e dei numeri quantici. Per quelli possibili indicare l'interazione responsabile.

$$\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow \mu^+ + n + \pi^-$$

$$e^- + p \rightarrow \bar{\nu}_e + \pi^0$$

$$K^+ + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^+ + \pi^+$$

$$K^+ \rightarrow K^0 + \pi^+$$

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

Soluzione

Colonna sinistra dall'alto in basso

1) Conserva B, L_{mu}, Q. E' interazione debole (il neutrino può interagire solo debole)
2) Conserva Q, B. Sarebbe interazione forte, ma non conserva S ($\Delta S = -2$). Quindi non avviene
3) Conserva Q, B, $\Delta M>0$, conserva J. $\Delta S = -1$, quindi può avvenire come decadimento mediato da interazione debole

Colonna destra dall'alto in basso

1) Non conserva B, L_e
2) Conserva Q, B, S, $\Delta M<0$. Non può avvenire
3) Conserva Q, B, $L_{mu,}$ L_e , $\Delta M>0$, conserva J. Decadimento debole.

4) Nel modello a shell del nucleo atomico si assume che i protoni e i neutroni si muovano in un potenziale medio centrale a cui si aggiunge un termine di interazione spin-orbita del tipo

$$V_{ls} = -\frac{V_0}{A^{2/3}}\frac{\vec{l}\cdot\vec{s}}{\hbar^2}$$

essendo A il numero totale dei nucleoni e V_0 una costante positiva.

a) Si calcoli lo "splitting" dei livelli energetici determinato dall'interazione spin-orbita.

b) Si consideri il nucleo di ^{16}O nello stato fondamentale. Sapendo che la differenza di energia tra i livelli di protone $1p_{1/2}$ e $1p_{3/2}$ è 6.3 MeV, determinare il valore di V_0.

c) Si consideri ora il nucleo di ^{208}Pb (Z=82) nello stato fondamentale. Calcolare la differenza in energia tra i livelli di protone $1h_{9/2}$ e $1h_{11/2}$. Qual è la degenerazione di tali livelli ?

d) Quanto vale lo spin e la parità dei nuclei dei due nuclei ?

Soluzione

1. Il momento angolare totale del nucleone è $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{\ell}$ e quindi da $\boldsymbol{j}^2 = (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\ell})^2$ si ottiene

$$\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{j}^2 - \boldsymbol{\ell}^2 - \boldsymbol{s}^2\right)$$

   ed il valore di aspettazione di $\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{s}$ negli stati $|n, j(\ell, s), j_z\rangle$ è dato da

$$\langle\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{s}\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right)$$

   poichè $s = 1/2$. Usando $j = \ell \pm 1/2$ si ottiene quindi per lo splitting tra i livelli energetici

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{V_0}{A^{2/3}}(2\ell+1) \tag{2}$$

2. lo splitting del livello $1p$ di ^{16}O si ottiene usando $\ell = 1$ e $A = 16$ nella formula (2) da cui si ricava $V_0 = 26.7\text{MeV}$.
3. Usando il valore di V_0 appena calcolato e l'equazione (2) con $A = 208$ e $\ell = 5$ si ottiene $\Delta E_{1h} = 4.18\text{MeV}$. Ogni livello è degenere rispetto alle proiezioni di $\boldsymbol{j}$, quindi i livelli hanno degenerazione $2j + 1$, quindi il livello con $j = 9/2$ contiene 10 nucleoni, quello con $j = 11/2$ contiene 12 nucleoni.