1) Verificare con la formula semiempirica di massa se un nucleo di Bi (A=214, Z=83) può decadere:

- β^- in Po (Z=84)
- β^+ in Pb (Z=82)

[M_p = 938.28 MeV/c^2, M_n = 939.57 MeV/c^2, m_e = 0.511 MeV/c^2]
[a_V=15.7, a_S=17.2, a_C=0.71, a_A= 93.2, δ=+11.2 nuclei pari-pari,-11.2 nuclei dispari-dispari]

Soluzione
I decadimenti sono

$$^{214}_{83}Bi \rightarrow ^{214}_{82} Pb + e^+ + \nu_e$$

$$^{214}_{83}Bi \rightarrow ^{214}_{84} Po + e^- + \bar{\nu}_e$$

Calcoliamo i fattori Q per ciascun decadimento

$$Q_- = M(Bi) - M(Po) - m_e = Zm_p + (A-Z)m_n - B(Bi) - (Z+1)m_p - (A-Z-1)m_n + B(Po) - m_e =$$
$$= -m_p + m_n - m_e + B(Po) - B(Bi)$$

$$Q_+ = M(Bi) - M(Pb) - m_e = Zm_p + (A-Z)m_n - B(Bi) - (Z-1)m_p - (A-Z+1)m_n + B(Pb) - m_e =$$
$$= m_p - m_n - m_e + B(Pb) - B(Bi)$$

$$B(A,Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

L'energia di legame si calcola con la formula semiempirica di massa.
Dato che i nuclei hanno stesso numero di massa A, i termini di volume e superficie della formula sono uguali.
I termini differenti sono il termine coulombiano, quello di asimmettria (N-Z), e quello di pairing che per nuclei con A pari è diverso da zero.
In particolare per Npari-Zpari (Po,Pb) $\delta = 11.2$, invece per Bi (N dispari, Z dispari) $\delta = -11.2$

$$B(Po) - B(Bi) = B(214{,}84) - B(214{,}83) =$$
$$= -a_C\frac{84(84-1)}{214^{1/3}} + a_C\frac{83(83-1)}{214^{1/3}} - a_A\frac{((214-84)-84)^2}{4\times 214} + a_A\frac{((214-83)-83)^2}{4\times 214} + 2\frac{11.2}{A^{1/2}}$$
$$= 0.71\frac{83(-2)}{214^{1/3}} - 93.2\frac{46^2-48^2}{4\times 214} + 0.7656 = 2.296\,\textbf{MeV}$$

$$B(Pb) - B(Bi) = B(214{,}82) - B(214{,}83) =$$
$$= -a_C\frac{82(82-1)}{214^{1/3}} + a_C\frac{83(83-1)}{214^{1/3}} - a_A\frac{((214-82)-82)^2}{4\times 214} + a_A\frac{((214-83)-83)^2}{4\times 214} + 2\frac{11.2}{A^{1/2}}$$
$$= 0.71\frac{83\times 2}{214^{1/3}} - 93.2\frac{50^2-48^2}{4\times 214} + 0.7656 = -\,0.1046\ \textbf{MeV}$$

$$Q_- = -m_p + m_n - m_e + B(Po) - B(Bi) = 3.075\ \textbf{MeV}$$
$$Q_+ = +m_p - m_n - m_e + B(Pb) - B(Bi) = -\,1.906\ \textbf{MeV}$$

Può avvenire solo il decadimento β^- perché ha Q>0

2) Nelle sonde spaziali si usano generatori radio-termici di corrente elettrica che utilizzano l'energia del decadimento α di ^{238}Pu in ^{234}U, per cui Q=5.49 MeV e $t_{1/2}$ = 87.7 anni. La sonda Voyager 2, lanciata il 20.8.1977, era dotata di un generatore con efficienza del 5.5%. Voyager2 ha raggiunto Saturno il 26.8.1981.

Quanto plutonio doveva trasportare il Voyager2 per fornire una potenza elettrica di almeno 395 W quando oltrepassava Saturno ?

Soluzione

Alla partenza la sonda dispone di una certa quantità di carburante (Pu) che indichiamo con N_0.

All'arrivo su Saturno sono trascorsi 1466 giorni, e devono essere ancora presenti (cioè non decaduti) N atomi di Pu tali che forniscano una potenza pari a 395 W.

La potenza fornita è data dal numero di decadimenti al secondo (attività A = Nλ) per l'energia sviluppata in ciascun decadimento (Q) per l'efficienza di conversione del generatore

$$P = AQ\varepsilon = N\lambda Q\varepsilon$$

Calcoliamo la costante di disintegrazione

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{87.7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2.51 \cdot 10^{-10}\ \mathbf{s}^{-1}$$

e sostituendo nella formula di P si ricava N

$$N = \frac{P}{\lambda Q\varepsilon} = \frac{395}{2.51 \cdot 10^{-10} \cdot 5.49 \cdot 10^{6} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.05} = 358.3 \cdot 10^{23}$$

N è legato a N_0 dalla formula del decadimento radioattivo

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$N_0 = N \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) = 358.3 \cdot 10^{23} \exp\left(\frac{1466 \cdot \ln 2}{87.7 \cdot 365}\right) = 397.7 \cdot 10^{23}$$

Ricaviamo ora la massa iniziale di Pu (massa atomica M = 238 g)

$$m = \frac{N_0 M}{N_A} = \frac{397.7 \cdot 10^{23} \cdot 238}{6.02 \cdot 10^{23}} = 15.7 \textbf{ kg}$$

3) Un antiprotone di impulso 1 GeV/c incide su un protone in quiete nel sistema del laboratorio. Nell'interazione si produce una coppia $K^+ K^-$. Supponendo che le particelle K siano emesse ad un angolo di 90° nel sistema del centro di massa rispetto alla direzione di moto dell'antiprotone, calcolare l'angolo di emissione e l'impulso nel sistema del laboratorio.
[M_p = 938 MeV/c^2 ; M_K = 490 MeV/c^2]

Soluzione

L'energia nel CM è data da

$$s = E_{LAB}^2 = \left(E_{\bar{p}} + M_p, \overrightarrow{p_{\bar{p}}}\right)^2 = 2M_p^2 + 2M_p E_{\bar{p}}$$

Inoltre considerando lo stato finale nel sistema del CM

$$s = E_{CM}^2 = \left(2E_K^*, 0\right)^2 = 2E_K^{*2}$$

da cui uguagliando si ricava l'energia dei K nel CM

$$E_K^* = \sqrt{\frac{M_p^2 + M_p E_{\bar{p}}}{2}}$$

L'energia dell'antiprotone nel sistema LAB è $E_{\bar{p}} = \sqrt{\overrightarrow{p_{\bar{p}}}^2 + M_p^2} = 1.37$ **GeV**

$$E_K^* = \sqrt{\frac{M_p^2 + M_p E_{\bar{p}}}{2}} = 1.04 \text{ **GeV**}$$

$$p_K^* = \sqrt{E_K^{*2} - M_p^2} = 0.92 \text{ **GeV**}$$

dove T e L indicano l'impulso trasverso e longitudinale dei K e β è la velocità del CM nel sistema LAB

$$p_T = p_T^*$$

$$p_L = p_L^*\gamma + \gamma\beta E^*$$

Poiché i K sono emessi a 90° nel sistema del CM, $p_L^* = 0$

$$\beta = \frac{\overrightarrow{p_{\bar{p}}}}{E_{\bar{p}} + M_p} = 0.433$$

$p_T = p_K^* = 0.92$ **GeV/c**

$p_L = \gamma\beta E_K^* = 0.5$ **GeV/c**

L'angolo di emissione è

$$\theta = \arctan\frac{p_T}{p_L} = 61.5^\circ$$