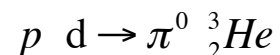
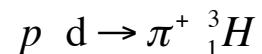


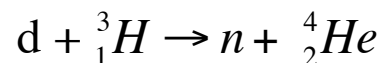
1) Basandosi su considerazioni legate alla conservazione dell'isospin nelle interazioni forti, determinare il rapporto fra le sezioni d'urto delle reazioni



2) In un meteorite è stato trovato 1 g di potassio e 10^{-5} g di ^{40}Ar . Si suppone che l'argon non fosse inizialmente presente nella roccia e sia stato prodotto interamente dal decadimento del ^{40}K per cattura elettronica. Tale decadimento avviene con rapporto di diramazione 10.72%, mentre il decadimento β del ^{40}K ha rapporto di diramazione 89.28%.

Determinare l'età del meteorite sapendo che la concentrazione del ^{40}K nel potassio naturale è $1.18 \times 10^{-2}\%$, la massa atomica media del potassio naturale è 39.089, e il tempo di dimezzamento del ^{40}K è 1.277×10^9 anni.

3) Un fascio di neutroni è prodotto bombardando un bersaglio di trizio con deutoni di energia 2.5 MeV, secondo la reazione



La corrente elettrica prodotta dal fascio di deutoni è 2 μA , e la densità superficiale del bersaglio di trizio è 0.2 mg/cm². Calcolare

a) L'intensità dei neutroni che attraversa una superficie di 1 cm² posta ad 1 m dal bersaglio e ad un angolo di 30° rispetto alla direzione del fascio, sapendo che la sezione d'urto differenziale a questo angolo è 13 mb/sr.

b) L'energia dei neutroni diffusi a 30°.

[$M_n = 939.5 \text{ MeV}/c^2$ $M_d = 1875.6 \text{ MeV}/c^2$ $M_{\text{He}} = 3755.6 \text{ MeV}/c^2$]

Soluzione Es. 1

Scriviamo innanzitutto l'isospin delle particelle coinvolte nelle reazioni

$$p = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$d = \left| I = 0; I_3 = 0 \right\rangle$$

$$\pi^+ = \left| I = 1; I_3 = +1 \right\rangle$$

$$\pi^0 = \left| I = 1; I_3 = 0 \right\rangle$$

$${}^3_1H = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$${}^3_2He = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle$$

Ora scriviamo gli stati iniziali e finali

$$|p d\rangle = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle \left| I = 0; I_3 = 0 \right\rangle$$

$$|\pi^+ {}^3_1H\rangle = \left| I = 1; I_3 = +1 \right\rangle \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^0 {}^3_2He\rangle = \left| I = 1; I_3 = 0 \right\rangle \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle$$

Lo stato iniziale delle reazioni ha isospin totale $I=1/2$ $I_3=1/2$

$$|p d\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Usando i coefficienti di Clebsch-Gordan si possono esprimere i due stati finali come combinazione della base degli stati di isospin totale $1 \times 1/2$

$$|\pi^+ \ ^3_1H\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^0 \ ^3_2He\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$1 \times 1/2$		$3/2$				
		$+3/2$	$3/2$	$1/2$		
$+1$	$+1/2$	1	$+1/2$	$+1/2$		
		$+1$	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$
		0	$+1/2$	$2/3$	$-1/3$	$1/2$
				$-1/2$	$-1/2$	
				0	$-1/2$	$2/3$
				-1	$+1/2$	$1/3$
						$1/3$
						$3/2$
						$-3/2$
						1

Consideriamo l'hamiltoniana H_S dell'interazione forte nei due decadimenti considerati.

La conservazione dell'isospin nell'interazione forte, implica la invarianza di H_S per rotazioni nello spazio dell'isospin.

Quindi gli autostati di isospin totali sono anche autostati di H_S , per cui possono avvenire solo reazioni fra stati con gli stessi valori di I e I_3 .

La larghezze dei modi di decadimento considerati si calcolano quindi così

$$\sigma(p\ d \rightarrow \pi^+ \ ^2_1H) = k \left| \langle p\ d | H_S | \pi^+ \ ^3_1H \rangle \right|^2 = k \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \left| H_S \right| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 = \frac{2}{3} k |M_{1/2}|^2$$

$$\sigma(p\ d \rightarrow \pi^0 \ ^3_2He) = k \left| \langle p\ d | H_S | \pi^0 \ ^3_2He \rangle \right|^2 = k \left| -\sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \left| H_S \right| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{3} k |M_{1/2}|^2$$

dove la costante di proporzionalità k è data dal prodotto degli stati accessibili nello spazio delle fasi, che è uguale per entrambi i modi.

Inoltre l'ampiezza di transizione M dipende solo dal valore di I , e non da I_3

Il rapporto fra le sezioni d'urto è

$$\frac{\sigma(p\ d \rightarrow \pi^+ \ ^2_1H)}{\sigma(p\ d \rightarrow \pi^0 \ ^3_2He)} = 2$$

Soluzione Es. 2

Il numero di atomi di ^{40}K in un 1 g di potassio naturale è

$$N_0 = m_K \frac{N_A}{A_K} c = 1 \frac{6.02 \times 10^{23}}{39.089} 1.18 \times 10^{-4} = 1.817 \times 10^{18}$$

Tale era il numero iniziale di atomi di ^{40}K alla formazione del meteorite.

Il numero di atomi di ^{40}K decaduti si può ricavare dal numero di atomi di ^{40}Ar presenti nella roccia e prodotti nel decadimento per cattura elettronica (EC) così

$$N = m_{Ar} \frac{N_A}{A_{Ar}} \frac{1}{BR} = 10^{-5} \frac{6.02 \times 10^{23}}{40} \frac{1}{0.1072} = 1.4039 \times 10^{18}$$

dove BR è il rapporto di diramazione, cioè la % di decadimenti del ^{40}K che avvengono per EC. Applicando la legge del decadimento radioattivo nella forma che esprime i decadimenti avvenuti nel tempo t

$$N = N_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

$$t = -\tau \ln \left[1 - \frac{N}{N_0} \right] = 1.842 \times 10^9 \times \ln(0.227) = 2.728 \times 10^9 \text{ a}$$

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{1.277 \times 10^9}{\ln 2} = 1.842 \times 10^9 \text{ a}$$

Soluzione es. 3

a) Il numero di neutroni per unità di tempo diffusi nell' angolo solido $\Delta\Omega$, definito dalla superficie $S=1\text{cm}^2$ posta a $d=1$ m dal bersaglio, è dato dalla formula

$$\Delta\dot{N}_f = \frac{d\sigma}{d\Omega} I n_b \Delta x \Delta\Omega$$

dove $\Delta\Omega = S/d^2$

L'intensità I del fascio di deutoni si ricava dalla corrente di fascio

$$I = \frac{i}{e} = \frac{2 \times 10^{-6} \text{ A}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 1.25 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

La densità di centri di scattering nel bersaglio di trizio è $n_b = \rho \frac{N_A}{A}$

Poiché è data la densità superficiale ρ_s e non la densità volumica ρ del trizio, osserviamo che $\rho_s = \rho \Delta x$. Possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} \Delta\dot{N}_f &= \frac{d\sigma}{d\Omega} I n_b \Delta x \Delta\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} I \rho \Delta x \frac{N_A}{A} \frac{S}{d^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} I \rho_s \frac{N_A}{A} \frac{S}{d^2} = \\ &= 1.3 \times 10^{-27} \times 1.25 \times 10^{13} \times 2 \times 10^{-4} \frac{6.02 \times 10^{23}}{3} \frac{1}{10^4} = 650 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Scriviamo il Q della reazione in termini delle energie cinetiche T delle particelle

$$Q = M_{\text{3H}} + M_d - M_n - M_{\text{4He}} = -T_d + T_n + T_{\text{4He}} = T_n + T_{\text{4He}} - 2.5$$

$$T_n + T_{\text{4He}} = Q + T_d = 17.6 + 2.5 = 20.1 \text{ MeV} \quad (*)$$

Consideriamo ora la conservazione della quantità di moto

$$p_{\text{He}}^y = p_n \sin \theta$$

$$p_{\text{He}}^x + p_n \cos \theta = p_d$$

Quadrando entrambi i termini e sommando $p_{\text{He}}^2 = p_n^2 + p_d^2 - 2p_n p_d \cos \theta$

Notiamo che viste le energie in gioco (\ll delle masse delle particelle), il problema si può trattare classicamente. Scriviamo l'energia cinetica dell'He

$$T_{\text{He}} = \frac{p_{\text{He}}^2}{2M_{\text{He}}} = \frac{p_n^2 + p_d^2 - 2p_n p_d \cos \theta}{2M_{\text{He}}}$$

e sostituendo in (*) si ottiene $T_n + T_{\text{4He}} = Q + T_d$

$$\frac{p_n^2}{2M_n} + \frac{p_n^2 + p_d^2 - 2p_n p_d \cos \theta}{2M_{\text{He}}} = Q + T_d$$

$$\frac{p_n^2}{2} \left(\frac{1}{M_n} + \frac{1}{M_{He}} \right) - \frac{p_n p_d \cos \theta}{M_{He}} + \frac{p_d^2}{2M_{He}} = Q + T_d$$

$$\left(\frac{M_n + M_{He}}{M_n} \right) p_n^2 - 2 p_n p_d \cos \theta + p_d^2 - 2(Q + T_d) M_{He} = 0$$

$$p_n = \frac{p_d \cos \theta \pm \sqrt{(p_d \cos \theta)^2 - [p_d^2 - 2(Q + T_d) M_{He}] \left(\frac{M_n + M_{He}}{M_n} \right)}}{\left(\frac{M_n + M_{He}}{M_n} \right)}$$

Sostituendo nell'espressione i valori numerici

$$\left(\frac{M_n + M_{He}}{M_n} \right) = 5$$

$$p_d = \sqrt{2E_d M_d} = \sqrt{2 \times 2.5 \times 1875.6} = 96.84 \text{ MeV}/c$$

$$p_n = \frac{96.84 \times \cos 30^\circ \pm \sqrt{(96.84 \times \cos 30^\circ)^2 - [(96.84 \times \cos 30^\circ)^2 - 2 \times 20.1 \times 3755.2] \times 5}}{5} = 185.9 \text{ MeV}/c$$

$$E_n = \frac{p_n^2}{2M_n} = \frac{185.9^2}{2 \times 939.5} = 18.4 \text{ MeV}$$