1) Basandosi su considerazioni legate alla conservazione dell'isospin nelle interazioni forti, determinare il rapporto fra le sezioni d'urto delle reazioni

$$p \;\; \mathrm{d} \to \pi^+ \;\; {}^3_1H$$

$$p \;\; \mathrm{d} \to \pi^0 \;\; {}^3_2He$$

2) In un meteorite è stato trovato 1 g di potassio e 10^{-5} g di ^{40}Ar. Si suppone che l'argon non fosse inizialmente presente nella roccia e sia stato prodotto interamente dal decadimento del ^{40}K per cattura elettronica. Tale decadimento avviene con rapporto di diramazione 10.72%, mentre il decadimento β del ^{40}K ha rapporto di diramazione 89.28%.

Determinare l'età del meteorite sapendo che la concentrazione del ^{40}K nel potassio naturale è 1.18×10^{-2}%, la massa atomica media del potassio naturale è 39.089, e il tempo di dimezzamento del ^{40}K è 1.277×10^9 anni.

3) Un fascio di neutroni è prodotto bombardando un bersaglio di trizio con deutoni di energia 2.5 MeV, secondo la reazione

$$\mathrm{d} + {}^3_1H \to n + {}^4_2He$$

La corrente elettrica prodotta dal fascio di deutoni è 2 μA, e la densità superficiale del bersaglio di trizio è 0.2 mg/cm^2. Calcolare

a) L'intensità dei neutroni che attraversa una superficie di 1 cm^2 posta ad 1 m dal bersaglio e ad un angolo di 30° rispetto alla direzione del fascio, sapendo che la sezione d'urto differenziale a questo angolo è 13 mb/sr.

b) L'energia dei neutroni diffusi a 30°.

[M_n = 939.5 MeV/c^2 M_d = 1875.6 MeV/c^2 M_{He} = 3755.6 MeV/c^2]

Soluzione Es. 1

Scriviamo innanzitutto l'isospin delle particelle coinvolte nelle reazioni

$$p = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$d = \left| I = 0; I_3 = 0 \right\rangle$$

$$\pi^+ = \left| I = 1; I_3 = +1 \right\rangle$$

$$\pi^0 = \left| I = 1; I_3 = 0 \right\rangle$$

$$^3_1H = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$^3_2He = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle$$

Ora scriviamo gli stati iniziali e finali

$$\left| p\ d \right\rangle = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle \left| I = 0; I_3 = 0 \right\rangle$$

$$\left| \pi^+\ ^3_1H \right\rangle = \left| I = 1; I_3 = +1 \right\rangle \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| \pi^0\ ^3_2He \right\rangle = \left| I = 1; I_3 = 0 \right\rangle \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle$$

Lo stato iniziale delle reazioni ha isospin totale I=1/2 I_3=1/2

$$|p\ d\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

Usando i coefficienti di Clebsch-Gordan si possono esprimere i due stati finali come combinazione della base degli stati di isospin totale 1x1/2

$$\left|\pi^{+}\ {}^{3}_{1}H\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\pi^{0}\ {}^{3}_{2}He\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

1×1/2

	3/2
	+3/2
+1 +1/2	1

	3/2	1/2
	+1/2	+1/2
+1 −1/2	1/3	2/3
0 +1/2	2/3	−1/3

	3/2	1/2
	−1/2	−1/2
0 −1/2	2/3	1/3
−1 +1/2	1/3	−2/3

	3/2
	−3/2
−1 −1/2	1

Consideriamo l'hamiltoniana H_S dell'interazione forte nei due decadimenti considerati.

La conservazione dell'isospin nell'interazione forte, implica la invarianza di H_S per rotazioni nello spazio dell'isospin.

Quindi gli autostati di isospin totali sono anche autostati di H_S, per cui possono avvenire solo reazioni fra stati con gli stessi valori di I e I_3.

La larghezze dei modi di decadimento considerati si calcolano quindi così

$$\sigma\left(p\ \mathrm{d} \to \pi^+\ {}_1^2H\right) = k\left|\left\langle p\ d\middle|H_S\middle|\pi^+\ {}_1^3H\right\rangle\right|^2 = k\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\middle|H_S\middle|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle\right|^2 = \frac{2}{3}k\left|M_{1/2}\right|^2$$

$$\sigma\left(p\ \mathrm{d} \to \pi^0\ {}_2^3He\right) = k\left|\left\langle p\ d\middle|H_S\middle|\pi^0\ {}_2^3He\right\rangle\right|^2 = k\left|-\sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\middle|H_S\middle|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{3}k\left|M_{1/2}\right|^2$$

dove la costante di proporzionalità k è data dal prodotto degli stati accessibili nello spazio delle fasi, che è uguale per entrambi i modi.

Inoltre l'ampiezza di transizione M dipende solo dal valore di I, e non da I_3

Il rapporto fra le sezioni d'urto è

$$\frac{\sigma\left(p\ \mathrm{d} \to \pi^+\ {}_1^2H\right)}{\sigma\left(p\ \mathrm{d} \to \pi^0\ {}_2^3He\right)} = 2$$

Soluzione Es. 2

Il numero di atomi di 40^K in un 1 g di potassio naturale è

$$N_0 = m_K \frac{N_A}{A_K} c = 1 \frac{6.02 \times 10^{23}}{39.089} 1.18 \times 10^{-4} = 1.817 \times 10^{18}$$

Tale era il numero iniziale di atomi di ^{40}K alla formazione del meteorite.

Il numero di atomi di ^{40}K decaduti si può ricavare dal numero di atomi di ^{40}Ar presenti nella roccia e prodotti nel decadimento per cattura elettronica (EC) così

$$N = m_{Ar} \frac{N_A}{A_{Ar}} \frac{1}{BR} = 10^{-5} \frac{6.02 \times 10^{23}}{40} \frac{1}{0.1072} = 1.4039 \times 10^{18}$$

dove BR è il rapporto di diramazione, cioè la % di decadimenti del ^{40}K che avvengono per EC. Applicando la legge del decadimento radioattivo nella forma che esprime i decadimenti avvenuti nel tempo t

$$N = N_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau} \right) \right]$$

$$t = -\tau \ln\left[1 - \frac{N}{N_0} \right] = 1.842 \times 10^9 \times \ln(0.227) = 2.728 \times 10^9 \text{ a}$$

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{1.277 \times 10^9}{\ln 2} = 1.842 \times 10^9 a$$

Soluzione es. 3

a) Il numero di neutroni per unità di tempo diffusi nell' angolo solido $\Delta\Omega$, definito dalla superficie S=1cm^2 posta a d=1 m dal bersaglio, è dato dalla formula

$$\Delta \dot{N}_f = \frac{d\sigma}{d\Omega} I \, n_b \, \Delta x \, \Delta\Omega$$

dove $\Delta\Omega$ = S/d^2

L'intensità I del fascio di deutoni si ricava dalla corrente di fascio

$$I = \frac{i}{e} = \frac{2 \times 10^{-6}\,\mathrm{A}}{1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 1.25 \times 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$$

La densità di centri di scattering nel bersaglio di trizio è $n_b = \rho \frac{N_A}{A}$

Poiché è data la densità superficiale ρ_s e non la densità volumica ρ del trizio, osserviamo che $\rho_s = \rho\, \Delta x$. Possiamo riscrivere

$$\Delta \dot{N}_f = \frac{d\sigma}{d\Omega} I \, n_b \, \Delta x \, \Delta\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} I \, \rho \, \Delta x \frac{N_A}{A} \frac{S}{d^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} I \, \rho_s \frac{N_A}{A} \frac{S}{d^2} =$$

$$= 1.3 \times 10^{-27} \times 1.25 \times 10^{13} \times 2 \times 10^{-4} \frac{6.02 \times 10^{23}}{3} \frac{1}{10^4} = 650\ \mathrm{s}^{-1}$$

Scriviamo il Q della reazione in termini delle energie cinetiche T delle particelle

$$Q = M_{^3H} + M_d - M_n - M_{^4He} = -T_d + T_n + T_{^4He} = T_n + T_{^4He} - 2.5$$

$$T_n + T_{^4He} = Q + T_d = 17.6 + 2.5 = 20.1 \text{ MeV} \qquad (*)$$

Consideriamo ora la conservazione della quantità di moto

$$p_{He}^y = p_n \sin\theta$$

$$p_{He}^x + p_n \cos\theta = p_d$$

Quadrando entrambi i termini e sommando $\quad p_{He}^2 = p_n^2 + p_d^2 - 2p_n p_d \cos\theta$

Notiamo che viste le energie in gioco (<< delle masse delle particelle), il problema si può trattare classicamente. Scriviamo l'energia cinetica dell'He

$$T_{He} = \frac{p_{He}^2}{2M_{He}} = \frac{p_n^2 + p_d^2 - 2p_n p_d \cos\theta}{2M_{He}}$$

e sostituendo in (*) si ottiene $\quad T_n + T_{^4He} = Q + T_d$

$$\frac{p_n^2}{2M_n} + \frac{p_n^2 + p_d^2 - 2p_n p_d \cos\theta}{2M_{He}} = Q + T_d$$

$$\frac{p_n^2}{2}\left(\frac{1}{M_n}+\frac{1}{M_{He}}\right)-\frac{p_n p_d \cos\theta}{M_{He}}+\frac{p_d^2}{2M_{He}}=Q+T_d$$

$$\left(\frac{M_n+M_{He}}{M_n}\right)p_n^2-2p_n p_d\cos\theta+p_d^2-2\left(Q+T_d\right)M_{He}=0$$

$$p_n=\frac{p_d\cos\theta\pm\sqrt{\left(p_d\cos\theta\right)^2-\left[p_d^2-2\left(Q+T_d\right)M_{He}\right]\left(\frac{M_n+M_{He}}{M_n}\right)}}{\left(\frac{M_n+M_{He}}{M_n}\right)}$$

Sostituendo nell'espressione i valori numerici

$$\left(\frac{M_n+M_{He}}{M_n}\right)=5$$

$$p_d=\sqrt{2E_d M_d}=\sqrt{2\times 2.5\times 1875.6}=96.84\ \text{MeV/c}$$

$$p_n=\frac{96.84\times\cos 30°\pm\sqrt{\left(96.84\times\cos 30°\right)^2-\left[\left(96.84\times\cos 30°\right)^2-2\times 20.1\times 3755.2\right]\times 5}}{5}=185.9\ \text{MeV/c}$$

$$E_n=\frac{p_n^2}{2M_n}=\frac{185.9^2}{2\times 939.5}=18.4\ \text{MeV}$$