

1) Stabilire quali decadimenti sono possibili e in caso affermativo qual è l'interazione responsabile

$$\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$$

$$\Xi^- \rightarrow \pi^0 \pi^-$$

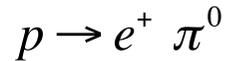
$$\Xi^- \rightarrow \Sigma^- \mu^- e^+ \bar{\nu}_e$$

$$\phi \rightarrow \rho^0 \pi^0$$

### **Soluzione**

- 1) Sì, debole perché non conserva stranezza
- 2) No non conserva numero barionico
- 3) No non conserva numero leptonico muonico ed elettronico
- 4) Sì, interazione forte

2) Secondo alcuni modelli GUT (Grand Unified Theory) il protone potrebbe decadere secondo la reazione



nonostante non siano conservati il numero barionico e leptonico.

a) Se tale decadimento avvenisse quale sarebbe l'impulso dei prodotti, assumendo che il protone decada in quiete nel sistema del laboratorio? [ $M_{\pi^0} = 140 \text{ MeV}/c^2$  ;  $M_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ ]

La ricerca del decadimento del protone è effettuata con rivelatori che consistono in un enorme serbatoio riempito di acqua le cui pareti sono equipaggiate di fototubi. I prodotti finali del decadimento (positrone e due fotoni dal decadimento del  $\pi^0$ ) produrrebbero tre distinte cascate elettromagnetiche (e.m.) nel rivelatore.

b) Assumendo un semplice modello di sciame e.m. calcolare la profondità a cui si ha il massimo dello sviluppo longitudinale dello sciame generato dal positrone. [Lunghezza di radiazione dell'acqua  $X_0 = 36 \text{ cm}$ ; energia critica  $E_c = 76 \text{ MeV}$ ]

c) Se con un rivelatore contenente  $10^3 \text{ m}^3$  d'acqua, si osservassero in un anno tre decadimenti, quale sarebbe la vita media del protone?

*(Suggerimento: calcolare il numero di protoni contenuti nelle molecole d'acqua prima di applicare la legge del decadimento radioattivo)*

## Soluzione

a) L'impulso totale del sistema è nullo. Dalla conservazione dell'impulso si ha

$$\vec{p}_{\pi^0} + \vec{p}_{e^+} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\pi^0} = -\vec{p}_{e^+} \Rightarrow |\vec{p}_{\pi^0}| = |\vec{p}_{e^+}|$$

Considerando ora la conservazione del quadrimpulso, che è uguale alla massa del protone,

$$s = m_p^2 = (E_{\pi^0} + E_{e^+})^2 - (\vec{p}_{\pi^0} + \vec{p}_{e^+})^2$$

$$s = E_{e^+}^2 + E_{\pi^0}^2 + 2E_{\pi^0}E_{e^+}$$

$$(m_p^2 - E_{e^+}^2 - E_{\pi^0}^2) = 2\sqrt{\vec{p}_{e^+}^2 + m_{e^+}^2}\sqrt{\vec{p}_{e^+}^2 + m_{\pi^0}^2}$$

$$(m_p^2 - 2\vec{p}_{e^+}^2 - m_{e^+}^2 - m_{\pi^0}^2)^2 = 4(\vec{p}_{e^+}^2 + m_{e^+}^2)(\vec{p}_{e^+}^2 + m_{\pi^0}^2)$$

$$m_p^4 + m_{e^+}^4 + m_{\pi^0}^4 + 4\vec{p}_{e^+}^4 + 2m_{e^+}^2 m_{\pi^0}^2 + 4\vec{p}_{e^+}^2 (m_{e^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - m_p^2) - 2m_p^2 (m_{e^+}^2 + m_{\pi^0}^2) = 4m_{\pi^0}^2 m_{e^+}^2 + 4\vec{p}_{e^+}^4 + 4\vec{p}_{e^+}^2 m_{e^+}^2 + 4\vec{p}_{e^+}^2 m_{\pi^0}^2$$

$$m_p^4 + m_{e^+}^4 + m_{\pi^0}^4 - 2m_{\pi^0}^2 m_{e^+}^2 - 2m_p^2 (m_{e^+}^2 + m_{\pi^0}^2) = 4\vec{p}_{e^+}^2 m_p^2$$

$$(m_p^2 - m_{e^+}^2 - m_{\pi^0}^2)^2 - 4m_{\pi^0}^2 m_{e^+}^2 = 4\vec{p}_{e^+}^2 m_p^2$$

$$|\vec{p}_{e^+}| = \sqrt{\frac{(m_p^2 - m_{e^+}^2 - m_{\pi^0}^2)^2 - 4m_{\pi^0}^2 m_{e^+}^2}{4m_p^2}} \approx \frac{(m_p^2 - m_{\pi^0}^2)}{2m_p} = 459 \text{ MeV}/c$$

b) Nella semplice schematizzazione dello sciame e.m. illustrata a pag. 37 Lez. 7, il numero di secondari nello sciame e la loro energia dopo uno spessore  $t=x/X_0$  è dato da

$$N(t) = 2^t$$

$$E(t) = \frac{E_0}{2^t}$$

dove  $E_0$  è l'energia del positrone (calcolata al punto (a)) che inizia lo sciame.

Notare che  $t$  esprime il numero di lunghezze di radiazione attraversate.

Il massimo dello sciame si ha ad una profondità  $t_{\max}$  tale che l'energia dei secondari eguaglia l'energia critica

$$E_c = \frac{E_0}{2^{t_{\max}}}$$

$$t_{\max} = \frac{\ln \frac{E_0}{E_c}}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{459}{76}}{\ln 2} = 2.59 \quad \Rightarrow \quad x_{\max} = t_{\max} \times X_0 = 2.59 \times 36 = 93.4 \text{ cm}$$

c) Calcoliamo il numero di molecole d'acqua per unità di volume. Sapendo che la densità dell'acqua è  $1 \text{ g/cm}^3$  e la massa molecolare dell'acqua è 18 (1 O + 2 H) si calcola

$$N_{H_2O} = \rho \frac{N_A}{A} = 1 \text{ g/cm}^3 \frac{6 \times 10^{23}}{18 \text{ g}} = 0.33 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

In  $10^3 \text{ m}^3$  le molecole sono  $N = 0.33 \times 10^{23} \times 10^3 \times 10^6 = 0.33 \times 10^{32}$

Il numero di protoni nel serbatoio  $N_p$  si ottiene moltiplicando  $N \times 10$  dove 10 è il numero di protoni in una molecola di acqua.

$$N_p = 0.33 \times 10^{32} \times 10 = 3.3 \times 10^{32}$$

Applichiamo ora la legge del decadimento  $N(t) = N_p \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

dove  $t = 1$  anno e  $\tau$  è la vita media del protone e  $N(t)=3$  è il numero di protoni decaduti nel tempo  $t$ . Poiché  $t \ll \tau$  si può sviluppare l'esponenziale al primo ordine

$$3 = 3.3 \times 10^{32} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

$$t \ll \tau$$

$$3 = 3.3 \times 10^{32} \left[ 1 - 1 + \frac{t}{\tau} \right]$$

$$\tau = t \times \frac{3.3 \times 10^{32}}{3} \approx 10^{32} \text{ anni}$$

3) Usando la formula semiempirica di massa

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

dimostrare che il nucleo  ${}_{29}^{64}\text{Cu}$  può decadere sia  $\beta^+$  che  $\beta^-$ .

- scrivere la formula dei due decadimenti
- calcolare il Q delle reazioni e la massima energia cinetica che possono avere elettrone e positrone
- Quale decadimento si verifica con maggiore probabilità?

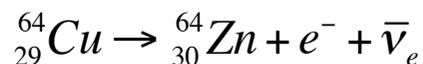
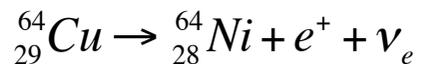
$$[a_V=15.7, a_S=17.2, a_C=0.71, a_A=93.2]$$

$$[\delta=+11.2 \text{ nuclei pari-pari}, -11.2 \text{ nuclei dispari-dispari}]$$

$$[m_e=0.511 \text{ MeV}/c^2 \quad m_p=938.27 \text{ MeV}/c^2 \quad m_n=939.56 \text{ MeV}/c^2]$$

## Soluzione

Scriviamo i decadimenti  $\beta^+$  e  $\beta^-$



e il Q delle reazioni

$$Q = M({}_{29}^{64}\text{Cu}) - M({}_{28}^{64}\text{Ni}) - m_e = T_e + T_{\nu_e} + T_{\text{Ni}} \approx T_e + T_{\nu_e} = T_e^{\text{Max}}$$

$$Q = 29m_p + (64 - 29)m_n - BE(\text{Cu}) - 28m_p - (64 - 28)m_n + BE(\text{Ni}) - m_e$$

$$Q = m_p - m_n - m_e - BE(\text{Cu}) + BE(\text{Ni})$$

$$Q = M({}_{29}^{64}\text{Cu}) - M({}_{30}^{64}\text{Zn}) - m_e = T_e + T_{\nu_e} + T_{\text{Ni}} \approx T_e + T_{\nu_e} = T_e^{\text{Max}}$$

$$Q = 29m_p + (64 - 29)m_n - BE(\text{Cu}) - 30m_p - (64 - 30)m_n + BE(\text{Zn}) - m_e$$

$$Q = -m_p + m_n - m_e - BE(\text{Cu}) + BE(\text{Zn})$$

$$BE(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

L'energia di legame si calcola con la formula semiempirica di massa.

Dato che i nuclei hanno stesso numero di massa A, i termini di volume e superficie della formula sono uguali.

I termini differenti sono il termine coulombiano, quello di asimmetria (N-Z), e quello di pairing che per nuclei con A pari è diverso da zero.

In particolare per Npari-Zpari (Ni, Zn)  $\delta = 11.2$ , invece per Cu (N dispari, Z dispari)  $\delta = -11.2$

$$Q_{\beta^+} = m_p - m_n - m_e - BE(Cu) + BE(Ni)$$

$$BE(Cu) - BE(Ni) = -a_C \frac{29(29-1)}{64^{1/3}} + a_C \frac{28(28-1)}{64^{1/3}} - a_A \frac{(29-35)^2}{4 \times 64} + a_A \frac{(28-36)^2}{4 \times 64} - 2 \frac{11.2}{64^{1/2}}$$

$$BE(Cu) - BE(Ni) = -a_C \frac{29 \times 28 - 28 \times 27}{64^{1/3}} - a_A \frac{6^2 - 8^2}{4 \times 64} - \frac{11.2}{4} = -14a_C + a_A \frac{28}{256} - 2.8 = -2.54625 \text{ MeV}$$

$$Q = 938.27 - 939.56 - 0.511 + 2.54625 = 0.745 \text{ MeV}$$

$$Q_{\beta^-} = -m_p + m_n - m_e - BE(Cu) + BE(Zn)$$

$$BE(Cu) - BE(Zn) = -a_C \frac{29(29-1)}{64^{1/3}} + a_C \frac{30(30-1)}{64^{1/3}} - a_A \frac{(29-35)^2}{4 \times 64} + a_A \frac{(30-34)^2}{4 \times 64} - 2 \frac{11.2}{64^{1/2}}$$

$$BE(Cu) - BE(Zn) = -a_C \frac{29 \times 28 - 30 \times 29}{64^{1/3}} - a_A \frac{6^2 - 4^2}{4 \times 64} - \frac{11.2}{4} = +14.5a_C - a_A \frac{20}{256} - \frac{11.2}{4} = 0.21375 \text{ MeV}$$

$$Q = -938.27 + 939.56 - 0.511 - 0.21375 = 0.565 \text{ MeV}$$

Il decadimento più probabile è il  $\beta^+$  perché ha Q maggiore, quindi maggiore spazio delle fasi disponibile