1) Stabilire quali decadimenti sono possibili e in caso affermativo qual è l'interazione responsabile

$$\Sigma^- \to n\ \pi^-$$

$$\Xi^- \to \pi^0\ \pi^-$$

$$\Xi^- \to \Sigma^-\ \mu^-\ e^+\ \bar{\nu}_e$$

$$\phi \to \rho^0 \pi^0$$

Soluzione

1) Sì, debole perché non conserva stranezza

2) No non conserva numero barionico

3) No non conserva numero leptonico muonico ed elettronico

4) Sì, interazione forte

2) Secondo alcuni modelli GUT (Grand Unified Theory) il protone potrebbe decadere secondo la reazione

$$p \rightarrow e^{+}\ \pi^{0}$$

nonostante non siano conservati il numero barionico e leptonico.

a) Se tale decadimento avvenisse quale sarebbe l'impulso dei prodotti, assumendo che il protone decada in quiete nel sistema del laboratorio? [$M_{\pi 0}$ = 140 MeV/c^2 ; M_p= 938 MeV/c^2]

La ricerca del decadimento del protone è effettuata con rivelatori che consistono in un enorme serbatoio riempito di acqua le cui pareti sono equipaggiate di fototubi. I prodotti finali del decadimento (positrone e due fotoni dal decadimento del π^0) produrrebbero tre distinte cascate elettromagnetiche (e.m.) nel rivelatore.

b) Assumendo un semplice modello di sciame e.m. calcolare la profondità a cui si ha il massimo dello sviluppo longitudinale dello sciame generato dal positrone. [Lunghezza di radiazione dell'acqua X_0=36 cm; energia critica E_c= 76 MeV]

c) Se con un rivelatore contenente 10^3 m^3 d'acqua, si osservassero in un anno tre decadimenti, quale sarebbe la vita media del protone?

(*Suggerimento: calcolare il numero di protoni contenuti nelle molecole d'acqua prima di applicare la legge del decadimento radioattivo*)

Soluzione

a) L’impulso totale del sistema è nullo. Dalla conservazione dell’impulso si ha

$$\vec{p}_{\pi^0} + \vec{p}_{e+} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\pi^0} = -\vec{p}_{e+} \Rightarrow \left|\vec{p}_{\pi^0}\right| = \left|\vec{p}_{e+}\right|$$

Considerando ora la conservazione del quadrimpulso, che è uguale alla massa del protone,

$$s = m_p^2 = \left(E_{\pi^0} + E_{e+}\right)^2 - \left(\vec{p}_{\pi^0} + \vec{p}_{e+}\right)^2$$

$$s = E_{e+}^2 + E_{\pi^0}^2 + 2E_{\pi^0}E_{e+}$$

$$\left(m_p^2 - E_{e+}^2 - E_{\pi^0}^2\right) = 2\sqrt{\vec{p}_{e+}^{\,2} + m_{e+}^2}\sqrt{\vec{p}_{e+}^{\,2} + m_{\pi^0}^2}$$

$$\left(m_p^2 - 2\vec{p}_{e+}^{\,2} - m_{e+}^2 - m_{\pi^0}^2\right)^2 = 4\left(\vec{p}_{e+}^{\,2} + m_{e+}^2\right)\left(\vec{p}_{e+}^{\,2} + m_{\pi^0}^2\right)$$

$$m_p^4 + m_{e+}^4 + m_{\pi^0}^4 + 4\vec{p}_{e+}^{\,4} + 2m_{e+}^2 m_{\pi^0}^2 + 4\vec{p}_{e+}^{\,2}\left(m_{e+}^2 + m_{\pi^0}^2 - m_p^2\right) - 2m_p^2\left(m_{e+}^2 + m_{\pi^0}^2\right) = 4m_{\pi^0}^2 m_{e+}^2 + 4\vec{p}_{e+}^{\,4} + 4\vec{p}_{e+}^{\,2} m_{e+}^2 + 4\vec{p}_{e+}^{\,2} m_{\pi^0}^2$$

$$m_p^4 + m_{e+}^4 + m_{\pi^0}^4 - 2m_{\pi^0}^2 m_{e+}^2 - 2m_p^2\left(m_{e+}^2 + m_{\pi^0}^2\right) = 4\vec{p}_{e+}^{\,2} m_p^2$$

$$\left(m_p^2 - m_{e+}^2 - m_{\pi^0}^2\right)^2 - 4m_{\pi^0}^2 m_{e+}^2 = 4\vec{p}_{e+}^{\,2} m_p^2$$

$$\left|\vec{p}_{e+}\right| = \sqrt{\frac{\left(m_p^2 - m_{e+}^2 - m_{\pi^0}^2\right)^2 - 4m_{\pi^0}^2 m_{e+}^2}{4m_p^2}} \approx \frac{\left(m_p^2 - m_{\pi^0}^2\right)}{2m_p} = 459 \ \text{MeV/c}$$

b) Nella semplice schematizzazione dello sciame e.m. illustrata a pag. 37 Lez. 7, il numero di secondari nello sciame e la loro energia dopo uno spessore $t=x/X_0$ è dato da

$$N(t) = 2^t$$

$$E(t) = \frac{E_0}{2^t}$$

dove E_0 è l'energia del positrone (calcolata al punto (a)) che inizia lo sciame.

Notare che t esprime il numero di lunghezze di radiazione attraversate.

Il massimo dello sciame si ha ad una profondità t_{max} tale che l'energia dei secondari eguaglia l'energia critica

$$E_C = \frac{E_0}{2^{t_{Max}}}$$

$$t_{Max} = \frac{\ln \frac{E_0}{E_c}}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{459}{76}}{\ln 2} = 2.59 \quad \Rightarrow \quad x_{Max} = t_{Max} \times X_0 \;= 2.59 \times 36 = 93.4 \text{ cm}$$

c) Calcoliamo il numero di molecole d’acqua per unità di volume. Sapendo che la densità dell’acqua è 1 g/cm^3 e la massa molecolare dell’acqua è 18 (1 O + 2 H) si calcola

$$N_{H_2O} = \rho \frac{N_A}{A} = 1 \text{ g/cm}^3 \, \frac{6\times 10^{23}}{18g} = 0.33\times 10^{23} \text{cm}^{-3}$$

In 10^3 m^3 le molecole sono N= 0.33x10^{23}x10^{3}x10^6 =0.33x10^{32}

Il numero di protoni nel serbatoio N_p si ottiene moltiplicando Nx10 dove 10 è il numero di protoni in una molecola di acqua.

N_p= 0.33x10^{32}x10 =3.3x10^{32}

Applichiamo ora la legge del decadimento $N(t) = N_p\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

dove t = 1 anno e tau è la vita media del protone e N(t)=3 è il numero di protoni decaduti nel tempo t. Poiché t<<tau si può sviluppare l’esponenziale al primo ordine

$$3 = 3.3\times 10^{32}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

$$t \ll \tau$$

$$3 = 3.3\times 10^{32}\left[1-1+\frac{t}{\tau}\right]$$

$$\tau = t\times \frac{3.3\times 10^{32}}{3} \approx 10^{32} \text{ anni}$$

3) Usando la formula semiempirica di massa

$$B(A,Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

dimostrare che il nucleo ${}_{29}^{64}Cu$ può decadere sia β^+ che β^-.

a) scrivere la formula dei due decadimenti

b) calcolare il Q delle reazioni e la massima energia cinetica che possono avere elettrone e positrone

c) Quale decadimento si verifica con maggiore probabilità?

[a_V=15.7, a_S=17.2, a_C=0.71, a_A= 93.2

δ=+11.2 nuclei pari-pari,-11.2 nuclei dispari-dispari]

[m_e=0.511 MeV/c^2 m_p=938.27 MeV/c^2 m_n=939.56 MeV/c^2]

Soluzione

Scriviamo i decadimenti β+ e β-

$$ {}^{64}_{29}Cu \rightarrow {}^{64}_{28}Ni + e^{+} + \nu_e $$

$$ {}^{64}_{29}Cu \rightarrow {}^{64}_{30}Zn + e^{-} + \bar{\nu}_e $$

e il Q delle reazioni

$$ Q = M\left({}^{64}_{29}Cu\right) - M\left({}^{64}_{28}Ni\right) - m_e = T_e + T_{\nu_e} + T_{Ni} \approx T_e + T_{\nu_e} = T_e^{Max} $$

$$ Q = 29m_p + (64-29)m_n - BE(Cu) - 28m_p - (64-28)m_n + BE(Ni) - m_e $$

$$ Q = m_p - m_n - m_e - BE(Cu) + BE(Ni) $$

$$ Q = M\left({}^{64}_{29}Cu\right) - M\left({}^{64}_{30}Zn\right) - m_e = T_e + T_{\nu_e} + T_{Ni} \approx T_e + T_{\nu_e} = T_e^{Max} $$

$$ Q = 29m_p + (64-29)m_n - BE(Cu) - 30m_p - (64-30)m_n + BE(Zn) - m_e $$

$$ Q = -m_p + m_n - m_e - BE(Cu) + BE(Zn) $$

$$BE(A,Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

L'energia di legame si calcola con la formula semiempirica di massa.

Dato che i nuclei hanno stesso numero di massa A, i termini di volume e superficie della formula sono uguali.

I termini differenti sono il termine coulombiano, quello di asimettria (N-Z), e quello di pairing che per nuclei con A pari è diverso da zero.

In particolare per Npari-Zpari (Ni, Zn) δ = 11.2 , invece per Cu (N dispari, Z dispari) δ = - 11.2

$$Q_{\beta+} = m_p - m_n - m_e - BE(Cu) + BE(Ni)$$

$$BE(Cu) - BE(Ni) = -a_C \frac{29(29-1)}{64^{1/3}} + a_C \frac{28(28-1)}{64^{1/3}} - a_A \frac{(29-35)^2}{4\times 64} + a_A \frac{(28-36)^2}{4\times 64} - 2\frac{11.2}{64^{1/2}}$$

$$BE(Cu) - BE(Ni) = -a_C \frac{29\times 28 - 28\times 27}{64^{1/3}} - a_A \frac{6^2 - 8^2}{4\times 64} - \frac{11.2}{4} = -14 a_C + a_A \frac{28}{256} - 2.8 = -2.54625 \text{ MeV}$$

$$Q = 938.27 - 939.56 - 0.511 + 2.54625 \ = \ 0.745 \text{ MeV}$$

$$Q_{\beta-} = -m_p + m_n - m_e - BE(Cu) + BE(Zn)$$

$$BE(Cu) - BE(Zn) = -a_C \frac{29(29-1)}{64^{1/3}} + a_C \frac{30(30-1)}{64^{1/3}} - a_A \frac{(29-35)^2}{4\times 64} + a_A \frac{(30-34)^2}{4\times 64} - 2\frac{11.2}{64^{1/2}}$$

$$BE(Cu) - BE(Zn) = -a_C \frac{29\times 28 - 30\times 29}{64^{1/3}} - a_A \frac{6^2 - 4^2}{4\times 64} - \frac{11.2}{4} = +14.5 a_C - a_A \frac{20}{256} - \frac{11.2}{4} = 0.21375 \text{ MeV}$$

$$Q = -938.27 + 939.56 \ -0.511 - 0.21375 = 0.565 MeV$$

Il decadimento più probabile è il β+ perché ha Q maggiore, quindi maggiore
Spazio delle fasi disponibile