1) I seguenti processi possono avvenire per interazione forte ?

$$K^- p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0$$
$$K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda^0$$

Basandosi su considerazioni legate alla conservazione dell'isospin, determinare il rapporto fra le sezioni d'urto delle due reazioni, parametrizzando le ampiezze di transizione in funzione del valore di isospin totale. Assumere che la densità degli stati finali sia la stessa nelle due reazioni.

Soluzione

Scriviamo i numeri quantici della particelle coinvolte:

K^- è un mesone pseudoscalare J=0^- I =1/2 I_3 = -1/2 S=-1

p è barione J=$1/2^+$ I = 1/2 I_3 = +1/2 S=0

π^0 è un mesone pseudoscale J=0^- I = 1 I_3 = 0 S=0

Σ^0 è un barione J=$1/2^+$ I =1 I_3 = 0 S=-1

Λ^0 è un barione J=$1/2^+$ I =0 I_3 = 0 S=-1

Nelle interazioni forti si conservano il numero barionico, isospin, stranezza oltre che carica elettrica e momento angolare.

In entrambe le reazioni si conservano tutti i numeri quantici e quindi possono avvenire per interazione forte

$$K^- p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0$$

Q -1 + 1 = 0 +0

B 0 + 1 = 0 +1

S -1 + 0 = 0 -1

I_3 -1/2 + 1/2 = 0 + 0

I si può conservare perché nello stato iniziale $1/2 \oplus 1/2 = 0,1$ e nello stato finale I=0

$$K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda^0$$

Q -1 + 1 = 0 +0

B 0 + 1 = 0 +1

S -1 + 0 = 0 -1

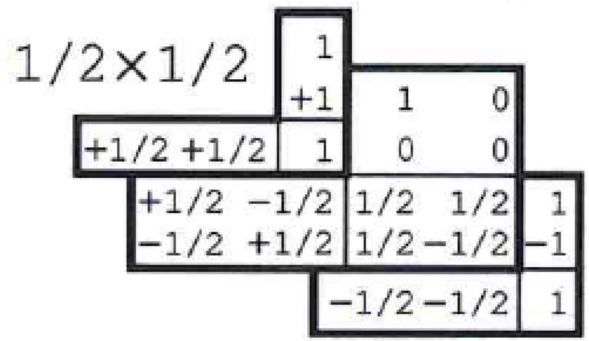
I_3 -1/2 + 1/2 = 0 + 0

I si può conservare perché nello stato iniziale $1/2 \oplus 1/2 = 0,1$ e nello stato finale I=0

Le due reazioni hanno stato iniziale che si può esprimere nelle componenti I, I_3

$$\left|K^- p\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle$$

Usando i coefficienti di Clebsch-Gordan si può esprimere lo stato come combinazione della base degli stati di isospin totale 1/2x1/2



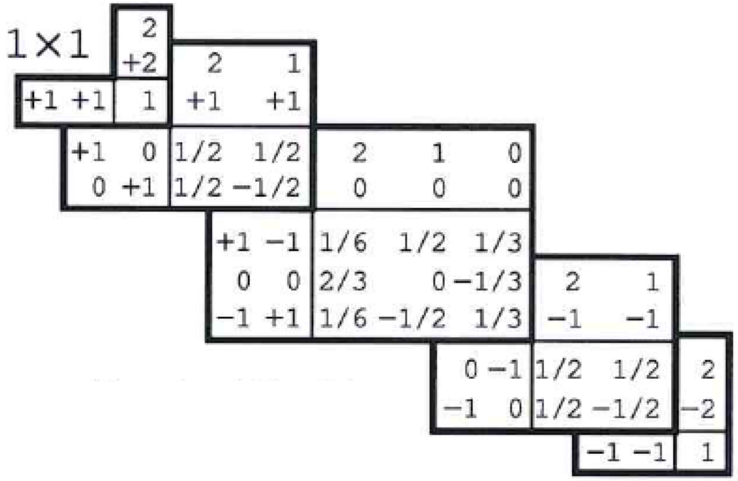
$$\left|K^- p\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0,0\right\rangle$$

Scriviamo ora gli stati finali nelle componenti di isospin di ciascuna particella

$$\left|\pi^0\Sigma^0\right\rangle = \left|1,0\right\rangle\left|1,0\right\rangle$$

$$\left|\pi^0\Lambda^0\right\rangle = \left|1,0\right\rangle\left|0,0\right\rangle$$

Usando i coefficienti di Clebsch-Gordan si può esprimere lo stato finale della prima reazione come combinazione della base degli stati di isospin totale 1x1



$$\left|\pi^0\Sigma^0\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|2,0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle$$

Invece $\left|\pi^0\Lambda^0\right\rangle = \left|1,0\right\rangle$ perché la Λ ha isospin 0

Consideriamo l’hamiltoniana H_S dell’interazione forte nei due decadimenti considerati.

La conservazione dell’isospin nell’interazione forte, implica la invarianza di H_S per rotazioni nello spazio dell’isospin.

Quindi gli autostati di isospin totali sono anche autostati di H_S, per cui possono avvenire solo transizioni fra stati con gli stessi valori di I e I_3.

Le sezioni d’urto si calcolano quindi così

$$\sigma\left(K^- p \to \pi^0 \Sigma^0\right) = k\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\langle 1,0|H_S|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\langle 0,0|H_S|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,0|H_S|0,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0,0|H_S|0,0\rangle\right|^2 = \frac{1}{6}k\left|M_0\right|^2$$

$$\sigma\left(K^- p \to \pi^0 \Lambda^0\right) = k\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0|H_S|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0,0|H_S|1,0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}k\left|M_1\right|^2$$

dove la costante di proporzionalità k è data dal prodotto degli stati accessibili nello spazio delle fasi, che è assunta uguale per entrambe le reazioni.

Inoltre l’ampiezza di transizione M dipende solo dal valore di I, e non da I_3

Il rapporto fra le sezioni d’urto è

$$\frac{\sigma\left(K^- p \to \pi^0 \Sigma^0\right)}{\sigma\left(K^- p \to \pi^0 \Lambda^0\right)} = \frac{1}{3}\frac{\left|M_0\right|^2}{\left|M_1\right|^2}$$

2) Considerare il processo di fotodissociazione in cui un fotone incide su di un nucleo di deuterio fermo e lo dissocia

$$\gamma\ d \rightarrow p\ n$$

a) Calcolare il Q della reazione sapendo che l'energia di legame del deuterio è -2.22 MeV

[M_n = 939.56 MeV/c^2 ; M_p= 938.27 MeV/c^2]

b) Determinare l'energia nel centro di massa in funzione dell'energia del fotone Eg

c) Calcolare l'energia di soglia del fotone perché la reazione possa avvenire

d) Calcolare l'energia del fotone necessaria per produrre il neutrone fermo nel sistema del LAB

Soluzione

1. $Q = m_\gamma + m_d - m_n - m_p = -B \approx -2.22\,\mathrm{MeV}$, dove con B si è indicata l'energia di legame del deutone.
2. L'energia nel centro di massa è data da $\sqrt{s}$, dove

$$s = (p_\gamma + p_d)^2 = m_\gamma^2 + m_d^2 + 2p_\gamma p_d = m_d^2 + 2m_d E_\gamma$$

   quindi $E_{cm} = \sqrt{m_d^2 + 2m_d E_\gamma}$

3. Alla soglia i prodotti di decadimento sono fermi nel centro di massa, quindi alla soglia $s^2 = (m_n + m_p)^2$ (si può arrivare a questo risultato anche ricordando che $p_1 p_2 \geq m_1 m_2$ e quindi $(p_1 + p_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2$) quindi

$$E_\gamma^s = \frac{(m_n + m_p)^2 - m_d^2}{2m_d}$$

4. Quadrando la conservazione del quadriimpulso, $p_\gamma + p_d = p_n + p_p$ si ottiene

$$m_d^2 + 2m_d E_\gamma = m_n^2 + m_p^2 + 2(E_n E_p - \mathbf{p}_n \mathbf{p}_p)$$

   Se si impone $\mathbf{p}_n = \mathbf{0}$ e $E_n = m_n$ si ha anche per la conservazione dell'energia $E_p = E_\gamma + m_d - m_n$ e quindi

$$m_d^2 + 2m_d E_\gamma^n = m_n^2 + m_p^2 + 2m_n(E_\gamma^n + m_d - m_n)$$

   da cui si ottiene

$$E_\gamma^n = \frac{-(m_d - m_n)^2 + m_p^2}{2(m_d - m_n)}$$

3) Muoni di alta energia vengono prodotti negli sciami estesi originati dall'interazione dei raggi cosmici con l'atmosfera terrestre. Assumiamo per semplicità che muoni di 10 GeV di energia vengano prodotti a 10 km di altezza sul livello del mare.

Spiegare se tali muoni possono fare effetto Cerenkov, sapendo che l'indice di rifrazione dell'atmosfera è n = 1.003

In caso affermativo, calcolare:

a) l'angolo di emissione dei fotoni rispetto alla direzione di moto dei muoni;

b) Il numero di fotoni prodotti da un muone che raggiunge il livello del mare;

c) l'energia persa dal muone per emissione della radiazione Cerenkov, assumendo che ogni fotone abbia un'energia media di 2 eV.

d) Confrontare l'energia persa per emissione Cerenkov con la perdita di energia per ionizzazione (dE/dx) dei muoni in atmosfera. Qual è maggiore?

Assumere per l'aria: densità $\rho=1.2\text{x}10^{-3}$ g cm^{-3} ; Z/A=0.5; potenziale di eccitazione medio $<I>=85$ eV.

Soluzione

I muoni possono fare effetto Cerenkov se viaggiano a velocità maggiore della velocità della luce nell'atmosfera.

La velocità della luce in atmosfera è β_{th} = 1/n = 0.9970

La velocità dei muoni è

$$\gamma = \frac{E}{m_\mu c^2} = \frac{10}{0.105} = 95.238$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.999945$$

ed è quindi maggiore della velocità di soglia per avere effetto Cerenkov.

b) L'angolo di emissione dei fotoni è l'angolo di apertura del cono Cerenkov

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n}$$

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{1}{\beta n}\right) = 4.4°$$

c) Il numero di fotoni Cerenkov emessi per unità di percorso è dato da

$$\frac{dN}{dx} = 600 z^2 \sin^2 \theta_c$$

dove z è la carica della particella (nel caso del muone z=1) e la lunghezza percorsa è espressa in cm

$$\frac{dN}{dx} = 600 \sin^2 (4.4°) = 3.5 \text{ fotoni/cm}$$

Quando il muone raggiunge il livello del mare, avrà percorso L=10 km = 10^6 cm

producendo 3.5x10^6 fotoni in totale.

L'energia totale persa, assumendo 2 eV per fotone è quindi

ΔE_{cer}= 2 eV x 3.5x10^6 fotoni = 7x10^6 eV = 7 MeV

d) Per calcolare la perdita di energia per ionizzazione applichiamo la formula di Bethe-Block dove abbiamo ignorato le correzioni per effetto densità e di shell.

$$-\frac{dE}{\rho\, dx} = 0.1535\frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e\beta^2\gamma^2c^2}{I}\right)^2 - 2\beta^2\right] \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Sostituendo i valori

$$-\frac{dE}{\rho\, dx} = 0.1535\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{0.999945^2}\left[2\ln\left(\frac{2\times 0.511\times 0.999945^2\times 95.238^2}{85\times 10^{-6}}\right) - 2\times 0.999945^2\right] = 2.76 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

$$\Delta E_{ion} = \left(\frac{dE}{\rho\, dx}\right)\times L\times\rho = 2.76\times 10^6\times 1.2\times 10^{-3} = 3312 \text{ MeV} = 3.312 \text{ GeV}$$

Confrontando la perdita di energia per effetto Cerenkov e quella per ionizzazione si vede che la prima è trascurabile

$$\Delta E_{ion} = 3312 \text{ MeV}$$

$$\Delta E_{cer} = 92 \text{ MeV}$$

$$\frac{\Delta E_{cer}}{\Delta E_{ion}} = \frac{92}{3312} = 0.028$$

4) Un fascio di neutrini ν_e incide su un blocco di piombo di spessore d = 70 cm ed area trasversale S = 10 cm^2. Se la sezione d'urto è $\sigma \cong 10^{-43}$ cm^2, calcolare per quale valore del flusso dei neutrini si hanno 100 interazioni al giorno.

[A_{Pb} = 208; ρ_{Pb} = 11.35 g/cm^3]

Soluzione

La densità di centri di scattering nel bersaglio è

$$n_b = \rho \frac{N_A}{A} = 11.35\ \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{208} = 3.33 \times 10^{22}\,\text{cm}^{-3}$$

Il numero di interazioni nell'unità di tempo è dato da $\Delta \dot{N}_f = \sigma I\, n_b\, \Delta x \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{\Delta \dot{N}_f}{\sigma n_b\, \Delta x}$

da cui si può ricavare l'intensità del fascio di neutrini

$$\Delta \dot{N}_f = 100\ \text{days}^{-1} = 1.16 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$$

$$I = \frac{\Delta \dot{N}_f}{\sigma n_b\, \Delta x} = \frac{1.16 \times 10^{-3}}{10^{-43} \times 3.33 \times 10^{22} \times 70} = 5 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}$$

Il flusso di neutrini si ottiene dividendo I per la superficie attraversata

$$\Phi = \frac{I}{S} = \frac{5 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}}{10\ \text{cm}^2} = \frac{5 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}}{10^{-3}\ \text{m}^2} = 5 \times 10^{18}\,\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$$