Fisica Nucleare e subnucleare
Esame scritto del 29/9/2017

1) Scrivere il decadimento β^+ dell' ${}^{35}_{18}Ar$. Determinare i valori di J^P dei due nuclei e il momento angolare dei leptoni prodotti nel decadimento.

Stimare il coefficiente a_c del termine coulombiano della formula semiempirica di massa, sapendo che l'energia cinetica massima del positrone emesso nel decadimento è di 4.95 MeV.

Stimare il raggio del nucleo padre e del nucleo figlio.

[M_n = 939.56 MeV/c^2 ; M_p= 938.27 MeV/c^2; M_e= 511 keV/c^2]

2) In un bersaglio di idrogeno liquido esposto ad un fascio di pioni avviene la reazione

$\pi^- p \rightarrow \Lambda\ K^0$.

a) Se l'energia nel sistema del centro di massa della reazione è $\sqrt{s}$= 3 GeV, calcolare gli impulsi di π^- e Λ nel sistema del centro di massa.

b) Assumendo il protone a riposo nel sistema del laboratorio, il mesone K può essere emesso all'indietro nel sistema del laboratorio?

c) Calcolare la frequenza delle reazioni sapendo che il volume e la densità del bersaglio sono rispettivamente V_b=10^{-4} m^3 e ρ=71 kg/m^3, il flusso dei pioni è $10^7 m^{-2} s^{-1}$ e la sezione d'urto della reazione, σ =0.4 mb.

d) Qual è interazione responsabile del processo?

[M_p = 938 MeV/c^2 ; M_π= 140 MeV/c^2; M_Λ= 1.115 GeV/c^2; M_K= 0.5 GeV/c^2]

3) Spiegare se i seguenti decadimenti del mesone neutro ϕ sono permessi o proibiti

$$\phi \to \pi^+\pi^-$$

$$\phi \to \pi^0\pi^0$$

$$\phi \to e^+\mu^-$$

Sapendo che la massa del mesone ϕ è 1020 MeV e la sua larghezza di riga è 4.25 MeV calcolare il tempo di vita medio della particella.

4) Un pione carico (massa 140 MeV/c^2) di impulso iniziale 500 MeV/c attraversa uno spessore di alluminio (densità 2.7 g/cm^3), prima di entrare in un rivelatore Cerenkov il cui indice di rifrazione è n=1.1.
Il pione nell'alluminio si comporta come una particella al minimo di ionizzazione (dE/dx = 2 MeV cm^2 g^{-1}).
Qual è il massimo spessore D che il pione può attraversare, tale che possa ancora emettere luce Cerenkov una volta entrato nel rivelatore.

Soluzione es. 1

Il decadimento β^+ dell' ^{35}Ar è $\quad {}^{35}_{18}\mathrm{Ar} \rightarrow {}^{35}_{17}Cl + e^+ + \nu_e$

$Q_\beta = M_{Ar} - M_{Cl} - M_e = T_{Cl} + T_e + T_\nu \approx T_e + T_\nu = T_e^{Max} = 4.95$ MeV

^{35}Ar: 17 neutroni $(1s_{1/2})^2$ $(1p_{3/2})^4$ $(1p_{1/2})^2$ $(1d_{5/2})^6$ $(2s_{1/2})^2$ $(1d_{3/2})^1$

18 protoni $(1s_{1/2})^2$ $(1p_{3/2})^4$ $(1p_{1/2})^2$ $(1d_{5/2})^6$ $(2s_{1/2})^2$ $(1d_{3/2})^2$

→ $J^P = 3/2^+$

^{35}Cl: 17 protoni e 18 neutroni → $J^P = 3/2^+$

Per la conservazione del momento angolare, i due leptoni possono avere **J_lep**=0, 1

Le masse dei nuclei di ^{35}Ar e ^{35}Cl sono date da

$M_{Ar} = 18\, M_p + 17\, M_n - B(^{35}Ar)$

$M_{Cl} = 17\, M_p + 18\, M_n - B(^{35}Cl)$

dove B è l'energia di legame nucleare.

Sottraendo la seconda equazione dalla prima

$M_{Ar} - M_{Cl} = B(^{35}Cl) - B(^{35}Ar) + M_p - M_n$

Ma dal Q valore del decadimento sappiamo $M_{Ar} - M_{Cl} - M_e = T_e^{Max}$ che sostituita nella precedente dà

$T_e^{Max} + M_e = B(^{35}Cl) - B(^{35}Ar) + M_p - M_n$

da cui si ricava

$B(^{35}Cl) - B(^{35}Ar) = T_e^{Max} + M_e - M_p + M_n = 4.95+0.511-(938.27-939.56) = 6.751$ MeV

Possiamo ora valutare la differenza di energia di legame tra Cloro e Argon
I due nuclei sono speculari, quindi hanno uguali tutti i termini della formula di Weizsacker, tranne il termine della repulsione coulombiana.
Per cui la differenza di energia di legame è dovuta solo al termine di repulsione coulombiana

$$BE(Cl) - BE(Ar) = 6.751 \text{ MeV}=$$

$$a_c\left[\mathrm{Z}_{\mathrm{Ar}}\left(\mathrm{Z}_{\mathrm{Ar}}-1\right)-\mathrm{Z}_{\mathrm{Cl}}\left(\mathrm{Z}_{\mathrm{Cl}}-1\right)\right]A^{-\frac{1}{3}}$$

$$a_c = \frac{6.751}{18\times 17-17\times 16}35^{\frac{1}{3}} = 0.65$$

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$$

$$R_{Cl} = R_{Ar} = 1.22\times 35^{\frac{1}{3}} = 3.93 \text{ fm}$$

Soluzione es. 2

(a) Per la conservazione del quadrimpulso nel SCM, si ha

(1) $$s = \left(p_p^* + p_\pi^*\right)^2 = p_p^{*2} + p_\pi^{*2} + 2 p_p^* \cdot p_\pi^* = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_p^* E_\pi^* - 2\vec{p}_p^* \cdot \vec{p}_\pi^*$$

Nel SCM l’impulso totale è nullo, quindi

$$\vec{p}_p^* + \vec{p}_\pi^* = 0 \Rightarrow \vec{p}_p^* = -\vec{p}_\pi^*$$

$$s = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_p^* E_\pi^* + 2\left|\vec{p}_\pi^*\right|^2$$

Sappiamo inoltre che √s è l’energia totale del sistema $s = \left(E_p^* + E_\pi^*\right)^2 \Rightarrow E_p^* = E_\pi^* - \sqrt{s}$

Sostituendo quest’ultima in (1), otteniamo

$$s = m_\pi^2 + m_p^2 + 2\left|\vec{p}_\pi^*\right|^2 + 2\left(\sqrt{s} - E_\pi^*\right)E_\pi^*$$

$$s = m_\pi^2 + m_p^2 + 2\left|\vec{p}_\pi^*\right|^2 + 2\sqrt{s}E_\pi^* - 2E_\pi^{*2}$$

$$s = m_\pi^2 + m_p^2 - 2m_\pi^2 + 2\sqrt{s}E_\pi^*$$

da cui si ricava

$$E_\pi^* = \frac{s + m_\pi^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}} = \frac{9 + 0.140^2 - 0.938^2}{2 \times 3} = 1.357 \text{ GeV}$$

$$\vec{p}_\pi^{\,*} = \sqrt{E_\pi^{*2} - m_\pi^2} = \sqrt{1.357^2 - 0.14^2} = 1.349 \text{ GeV/c}$$

In modo analogo si ricava l'energia di Λ nel SCM

$$E_\Lambda^* = \frac{s + m_\Lambda^2 - m_K^2}{2\sqrt{s}} = \frac{9 + 1.115^2 - 0.497^2}{2 \times 3} = 1.666 \text{ GeV}$$

$$\vec{p}_\Lambda^{\,*} = \sqrt{E_\Lambda^{*2} - m_\Lambda^2} = \sqrt{1.666^2 - 1.115^2} = 1.238 \text{ GeV/c}$$

(b) Ricaviamo innanzitutto l'energia di K nel SCM, sapendo che il suo impulso è uguale a quello della Λ

$$p_K^* = p_\Lambda^*$$

$$E_K^* = \sqrt{p_K^{*2} + m_K^2} = \sqrt{1.238^2 + 0.497^2} = 1.334 \text{ GeV/c}$$

Assumendo che il K sia emesso da un angolo θ^* nel SCM, misurato rispetto alla direzione dell'impulso p^*_π, calcoliamo l'angolo θ nel SLAB usando le trasformazioni di Lorentz del quadrimomento

$$\mathrm{E}_K = \gamma\left(E_K^* + p_K^*\beta_{CM}\cos\theta^*\right)$$

$$p_K\cos\theta = \gamma_{CM}\left(p_K^*\cos\theta^* + E_K^*\beta_{CM}\right)$$

$$p_K\sin\theta = p_K^*\sin\theta^*$$

$$\tan\theta = \frac{p_K^*\sin\theta^*}{\gamma_{CM}\left(p_K^*\cos\theta^* + E_K^*\beta_{CM}\right)} = \frac{\sin\theta^*}{\gamma_{CM}\left(\cos\theta^* + \frac{E_K^*}{p_K^*}\beta_{CM}\right)} \qquad (2)$$

β e γ del CM coincidono con quelli del π nel SLAB, dato che il protone è fermo

$$\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} \qquad \beta = \frac{p_\pi}{E_\pi}$$

Dalla conservazione del quadrimpulso nello stato iniziale in SLAB si ricavano impulso e momento del pione

$$s = \left(p_p + p_\pi\right)^2 = p_p^2 + p_\pi^2 + 2p_p \cdot p_\pi = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_pE_\pi - 2\vec{p}_p \cdot \vec{p}_\pi$$

$$\vec{p}_p = 0 \Rightarrow E_p = m_p$$

$$s = m_\pi^2 + m_p^2 + 2m_pE_\pi$$

$$E_\pi = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} = \frac{9 - 0.140^2 - 0.938^2}{2 \times 0.938} = 4.32 \text{ GeV/c}$$

$$\vec{p}_\pi = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} = \sqrt{1.12^2 - 0.14^2} = 4.318 \text{ GeV/c}$$

$$\beta_{CM} = \frac{\left|\vec{p}_\pi\right|}{E_\pi} = 0.999$$

Notiamo ora che il denominatore della (2) è sempre >0 dato che

$$\frac{E_K^*}{p_K^*} = \frac{1.334}{1.238} = 1.077$$

$$\frac{E_K^*}{p_K^*}\beta_{CM} = 1.077 > 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\cos\theta^* + \frac{E_K^*}{p_K^*}\beta_{CM}\right) > 0$$

Poiché $0 \le \theta^* \le \pi$ → tan θ >0 per qualsiasi valore di θ^* .
Quindi anche se il K venisse emesso all'indietro ($\pi/2 \le \theta^* \le \pi$) nel SCM, comunque il suo angolo di emissione risulterebbe in avanti (θ >0) nel SLAB per effetto del boost di Lorentz.

(c) $M_{bersaglio} = \rho V_b = 7.1 \times 10^{-3}$ kg

$$\mathrm{N}_{\mathrm{protoni}} = \frac{M_{bersaglio}}{M_{protone}} \times N_A = \frac{7.1 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}{1} \times 6.02 \times 10^{23} = 4.276 \times 10^{24}$$

$$\frac{dN_{reazioni}}{dt} = N_{protoni} \sigma \ \phi = 4.28 \times 10^{24} \times 0.4 \times 10^{-31} \times 10^{7} = 1.712 \ \mathrm{s}^{-1}$$

(d) L'interazione è di tipo forte data la sezione d'urto, inoltre le particelle strane vengono prodotte in coppie con stranezza opposta nelle interazioni forti, come appunto avviene in questo caso (Λ S=-1 ; K^0 S=1)

Soluzione es. 3

La particella ϕ è un mesone vettore, cioè ha $J^P = 1^-$, mentre i pioni sono mesoni pseudoscalari cioè hanno $J^P = 0^-$

Quindi il momento angolare dello stato iniziale è $J_{in} = 1$, mentre la parità $P_{in} = -1$

Nel primo decadimento $\phi \to \pi^+\pi^-$

$J_{fin} = 0+L \rightarrow L = 1$ momento angolare del moto relativo di $\pi^\pm$

$P_{fin} = (-1) \times (-1) \times (-1)^L = -1 \rightarrow$ La parità è conservata

Il decadimento avviene.

Applicando la C-parità si deduce che la C-parità della ϕ è -1

Per quanto riguarda il secondo decadimento $\phi \to \pi^0\pi^0$

La C-parità dello stato finale con due π^0 è +1, mentre la C-parità di ϕ è -1 $\rightarrow$

il decadimento viola la conservazione della C-parità.

Inoltre L=1 (da conservazione J) per due bosoni identici di spin 0 non è possibile, perché la funzione d'onda del sistema sarebbe antisimmetrica per scambio

Il decadimento $\phi \to e^+\mu^-$ è proibito perché non conserva i numeri leptonici di elettrone e muone

Il tempo di vita medio della particella si ricava dal principio di indeterminazione eempo-energia

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar c}{10^{-15} c} = \frac{197.3\ [\mathrm{MeV\,fm}]}{4.25\ [\mathrm{MeV}]\ 3\times10^{8}\times10^{15}[\mathrm{fm\ s^{-1}}]} = 15.5\times10^{-23}\mathrm{s}$$

Soluzione es. 4

Per emettere luce il pione deve avere una velocità >= della soglia Cerenkov

$$\cos\theta_C = \frac{1}{\beta_{th} n} < 1 \Rightarrow \beta_{th} > \frac{1}{n} = 0.909$$

L’energia cinetica corrispondente è

$$E_K^f = m_\pi(\gamma - 1) = m_\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{th}^2}} - 1\right) = 196 \text{ MeV}$$

Mentre l’energia cinetica iniziale del pione che ha impulso p = 500 MeV/c è

$$E_K^i = \sqrt{p^2 + m_\pi^2} - m_\pi = 379.2 \text{ MeV}$$

Affinché il pione, una volta attraversato lo spessore D di alluminio, possa ancora emettere luce Cerenkov, la massima perdita di energia in D deve essere

$$\Delta E = E_K^i - E_K^f = 183 \text{ MeV}$$

La perdita di energia per unità di lunghezza è, al minimo di ionizzazione, dE/dx = 2 MeV cm^2 g^{-1}. Possiamo quindi scrivere

$$\Delta E = \left(\frac{dE}{dx}\right)\rho_{Al} D$$

da cui si ricava lo spessore massimo ammissibile D

$$D = \frac{\Delta E}{\left(\frac{dE}{dx}\right)\rho_{Al}} = \frac{183 \text{ MeV}}{2 \text{ MeVcm}^2 g^{-1} \times 2.7 g \text{ cm}^{-3}} = 33.9 \text{ cm}$$