Fisica Nucleare e subnucleare
Prova in itinere del 7/7/2017

1) Il nucleo ^{3}H decade β nel nucleo ^{3}He. Nel decadimento l'energia cinetica massima dell'elettrone è 19 keV.
   a) Determinare i valori di J^{P} dei due nuclei e il momento angolare dei leptoni prodotti nel decadimento.
   b) Calcolare la differenza di energia di legame tra i due nuclei.
   c) Nell'ipotesi che la differenza di energia di legame sia dovuta alla repulsione coulombiana dei due protoni nel nucleo di ^{3}He, calcolare la distanza media dei protoni.
   [M_n = 939.56 MeV/c^2 ; M_p= 938.27 MeV/c^2; M_e= 511 keV/c^2]

2) Nei raggi cosmici, protoni di alta energia possono collidere con fotoni della radiazione fossile a microonde secondo il processo $p+\gamma \rightarrow p+\pi^0$. Calcolare la soglia di produzione del pione, assumendo un'energia media dei fotoni pari a 10^{-3} eV. Qual è la distanza media percorsa dal protone prima che avvenga questa reazione, se la sua sezione d'urto è 250 μbarn e la densità dei fotoni della radiazione fossile è 400 cm^{-3} ? [M_p =135 MeV/c^2 ; M_p= 938 MeV/c^2]

3) Dire quale dei seguenti processi sono permessi e quali proibiti. Per quelli proibiti indicare le leggi di conservazioni violate. Per quelli permessi, indicare quale interazione media il processo.

$$p \rightarrow n + e^{+} + \nu_{e}$$

$$\pi^{0} \rightarrow e^{+} + e^{-} + \gamma$$

$$K^{+} \rightarrow \pi^{+} + K^{0}$$

$$\pi^{+} + n \rightarrow \Xi^{0} + K^{-}$$

$$K^{+} + p \rightarrow \Sigma^{0} + \pi^{+} + \pi^{+}$$

$$e^{-} + p \rightarrow \pi^{0} + \overline{\nu}_{e}$$

4) Basandosi su considerazioni legate alla conservazione dell'isospin nelle interazioni forti, determinare il rapporto fra le larghezze di decadimento Γ del barione Ξ^* (I=|1/2, +1/2> nei due seguenti modi di decadimento

$$\frac{\Gamma\left(\Xi^{0*} \rightarrow \Xi^{0}\pi^{0}\right)}{\Gamma\left(\Xi^{0*} \rightarrow \Xi^{-}\pi^{+}\right)}$$

Es. 1)
Il decadimento β^- del ^3H è

$$ {}^3_1H \rightarrow {}^3_2He + e^- + \bar{\nu}_e $$

$Q_\beta = M_{3H} - M_{3He} - M_e = T_{He} + T_e + T_\nu \approx T_e + T_\nu = T_e^{Max} = 19$ keV

^3H: 2 neutroni $(1s_{1/2})^2$ 1 protone $(1s_{1/2})^1 \rightarrow J^P = 1/2^+$
^3He: 1 neutrone $(1s_{1/2})^1$ 2 protoni $(1s_{1/2})^2 \rightarrow J^P = 1/2^+$

Per la conservazione del momento angolare, i due leptoni possono avere **J_lep**=0, 1

Le masse dei nuclei di ^3H e ^3He sono date da
$M_{3H} = M_p + 2\,M_n - B(^3H)$
$M_{3He} = 2M_p + M_n - B(^3He)$
dove B è l'energia di legame nucleare.

Sottraendo la seconda equazione dalla prima
$M_{3H} - M_{3He} = -B(^3H) + B(^3He) - M_p + M_n$

Ma dal Q valore del decadimento sappiamo $M_{3H} - M_{3He} - M_e = T_e^{Max}$ che sostituita nella precedente dà

$T_e^{Max} + M_e = -B(^3H) + B(^3He) - M_p + M_n$

da cui si ricava

$-B(^3H) + B(^3He) = T_e^{Max} + M_e + M_p - M_n = 19+ 511+(938.27-939.56)x10^3 = -760$ keV

I due nuclei sono speculari, quindi hanno uguali tutti i termini della formula di Weizsacker, tranne il termine della repulsione coulombiana

$$B_{3H} = B(3,1) = 3A - a_S 3^{2/3} - a_C \frac{1\times 0}{3^{1/3}} - a_A \frac{(1)^2}{4\times 3} - \frac{\delta}{3^{1/2}}$$

$$B_{3He} = B(3,2) = 3a_V - a_S 3^{2/3} - a_C \frac{2\times 1}{3^{1/3}} - a_A \frac{(1)^2}{4\times 3} - \frac{\delta}{3^{1/2}}$$

$$B_{3H} - B_{3He} = a_C \frac{2}{3^{1/3}} = \frac{0.86 \text{ MeV}}{R(\text{fm})} 2(2-1)$$

$$R = \frac{0.86\times 2 \text{ MeV}}{B_{3H} - B_{3He}} = \frac{1720}{760} \text{fm} = 2.26 \text{ fm}$$

Es. 2

La soglia di produzione è l'energia minima del protone perché avvenga la reazione e si calcola considerando fermi (energia cinetica =0) i prodotti della reazione nel CM. Consideriamo la conservazione del quadrimpulso, calcolato nel sistema del LAB per lo stato iniziale e nel sistema del CM per lo stato finale (impulso totale nullo)

$$\left(E_p + E_\gamma, \vec{p}_p + \vec{p}_\gamma\right) = \left(E^*_{p'} + E^*_\pi, \vec{p}^{\,*}_{p'} + \vec{p}^{\,*}_\pi\right) = \left(T^*_{p'} + T^*_\pi + m_p + m_\pi, 0\right)$$

$$m_p^2 + 2E_pE_\gamma - 2\vec{p}_p \cdot \vec{p}_\gamma = \left(T^*_{p'} + T^*_\pi + m_p + m_\pi\right)^2$$

$$m_p^2 + 2E_pE_\gamma - 2\left|\vec{p}_p\right| E_\gamma \cos\theta \geq \left(m_p + m_\pi\right)^2$$

$$2E_pE_\gamma - 2\left|\vec{p}_p\right| E_\gamma \cos\theta \geq m_\pi^2 + 2m_pm_\pi$$

$$4E_pE_\gamma \geq m_\pi^2 + 2m_pm_\pi$$

$$E_p \geq \frac{m_\pi^2 + 2m_pm_\pi}{4E_\gamma} = \frac{\left(135^2 + 2\times 135\times 938\right)\times 10^{12}}{4\times 10^{-3}} = 6.8\times 10^{19}\,\mathrm{eV}$$

La distanza media percorsa è

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} = \frac{1}{400\ \mathrm{cm}^{-3}\times 250\times 10^{-6}\times 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2} = 10^{25}\,\mathrm{cm} = 10^{25}\,\mathrm{cm}\,\frac{1}{3600\times 24\times 365\times 3\times 10^{10}\,\mathrm{cm/ly}} = 10^7\,\mathrm{ly} = 3\ \mathrm{Mpc}$$

Es. 3

$p \rightarrow n + e^{+} + \nu_e$ No $\Delta M<0$

$\pi^0 \rightarrow e^{+} + e^{-} + \gamma$ Si e.m.

$K^{+} \rightarrow \pi^{+} + K^{0}$ No $\Delta M<0$ (Massa K^{+} = 493 MeV/c^2 Massa K^0 = 497MeV/c^2)

$\pi^{+} + n \rightarrow \Xi^{0} + K^{-}$ No Q non conservata, $\Delta S=3$

$K^{+} + p \rightarrow \Sigma^{0} + \pi^{+} + \pi^{+}$ No $\Delta S=2$, S non conservata ma è produzione mediata da interazione forte.

$e^{-} + p \rightarrow \pi^{0} + \overline{\nu}_e$ No B e L_e violati

Es. 4

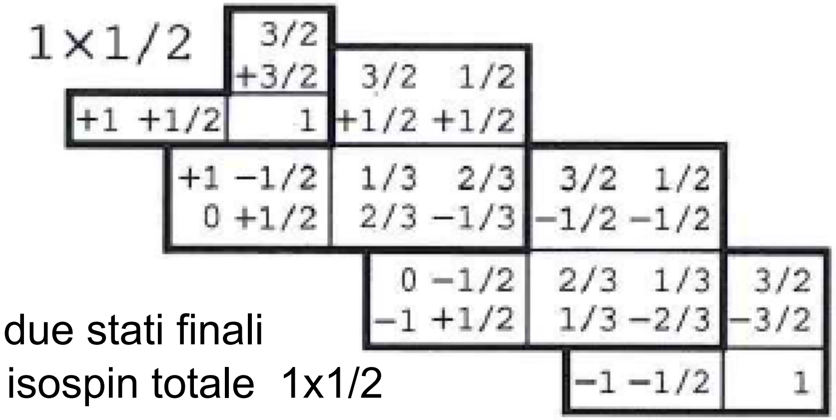
La particella che decade ha isospin 1/2

$$\Xi^{0*} = \left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle$$

I due modi di decadimento hanno stato finale rispettivamente

$$\left|\Xi^0\pi^0\right\rangle = \left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle\left|1;0\right\rangle$$

$$\left|\Xi^-\pi^+\right\rangle = \left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle\left|1;+1\right\rangle$$



Usando i coefficienti si possono esprimere i due stati finali come combinazione della base degli stati di isospin totale 1x1/2

$$\left|\Xi^0\pi^0\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\Xi^-\pi^+\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle$$

Consideriamo l'hamiltoniana H_S dell'interazione forte nei due decadimenti considerati.

La conservazione dell'isospin nell'interazione forte, implica la invarianza di H_S per rotazioni nello spazio dell'isospin.

Quindi gli autostati di isospin totali sono anche autostati di H_S, per cui possono avvenire solo transizioni fra stati con gli stessi valori di I e I_3.

La larghezze dei modi di decadimento considerati si calcolano quindi così

$$\Gamma\left(\Xi^{0*} \to \Xi^0 \pi^0\right) = k\left|\left\langle \Xi^{0*} \middle| H_S \middle| \Xi^0 \pi^0 \right\rangle\right|^2 = k\left|\sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle \frac{1}{2};+\frac{1}{2} \middle| H_S \middle| \frac{1}{2};+\frac{1}{2} \right\rangle\right|^2 = \frac{1}{3}k\left|M_{1/2}\right|^2$$

$$\Gamma\left(\Xi^{0*} \to \Xi^- \pi^+\right) = k\left|\left\langle \Xi^{0*} \middle| H_S \middle| \Xi^- \pi^+ \right\rangle\right|^2 = k\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle \frac{1}{2};+\frac{1}{2} \middle| H_S \middle| \frac{1}{2};+\frac{1}{2} \right\rangle\right|^2 = \frac{2}{3}k\left|M_{1/2}\right|^2$$

dove la costante di proporzionalità k è data dal prodotto degli stati accessibili nello spazio delle fasi, che è uguale per entrambi i modi.

Inoltre l'ampiezza di transizione M dipende solo dal valore di I, e non da I_3

Il rapporto fra le larghezze di decadimento è

$$\frac{\Gamma\left(\Xi^{0*} \to \Xi^0 \pi^0\right)}{\Gamma\left(\Xi^{0*} \to \Xi^- \pi^+\right)} = \frac{1}{2}$$