Fisica Nucleare e subnucleare
Prova in itinere del 16/6/2017

1) In un collisore sono accelerati un fascio di elettroni da 9 GeV/c e un fascio di positroni da 3.11 GeV/c. Nella collisione frontale di $e^+ e^-$ si creano particelle Y(4S).

a) Calcolare la massa della Y(4S) e il suo impulso del sistema del laboratorio.

b) La particella Y(4S) decade secondo il processo Y(4S) $\rightarrow B^+B^-$ (M_B=5279 MeV). Sapendo che la larghezza della risonanza Y(4S) è 20.5 MeV, calcolare la vita media del decadimento e il cammino percorso dalla Y(4S) nel laboratorio prima di decadere

c) Quanto vale l'impulso massimo dei mesoni B nel sistema del LAB e a quale angolo di emissione nel sistema del CM corrisponde?

d) Quanto vale l'angolo di emissione massimo dei B nel sistema del LAB?

2) La reazione $n + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{14}_{6}C + p$ è esotermica con Q=0.63 MeV. Il nucleo ^{14}C decade β^-.

a) Scrivere la reazione di decadimento e calcolare la massima energia cinetica dell'elettrone.

b) Calcolare lo stato J^P (spin parità) dei nuclei. Quali transizioni si possono avere nel decadimento? Qual è in ogni transizione il momento angolare totale dei leptoni prodotti?

c) Calcolare il momento magnetico dei nuclei.

[Massa neutrone = 939.56 GeV/c^2 ; Massa protone= 938.27 GeV/c^2]

3) Qual è l’indice di rifrazione minimo necessario per rivelare per effetto Cherenkov nuclei di ^{12}C di energia cinetica 500 MeV/n?
Qual è l’angolo di emissione Cerenkov per particelle ultrarelativistiche in un mezzo che ha l’indice di rifrazione calcolato alla domanda precedente?
[1 amu = 931.494 MeV/c^2]

4) Dire quale dei decadimenti che seguono, viola una o una o più leggi di conservazione e dare la legge o le leggi violate in ogni caso. Nel caso in cui il decadimento o la reazione può avvenire dire per quale interazione

$$p + \overline{p} \rightarrow \gamma$$

$$\rho^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

$$n + n \rightarrow \Sigma^0 + K^0$$

$$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \overline{K}^0 + p$$

5) La risonanza Δ è un multipletto di isospin 3/2. Basandosi su considerazioni legate alla conservazione dell’isospin, determinare il rapporto fra le sezioni d’urto delle reazioni

$$p + \pi^- \rightarrow \Delta^0$$

$$p + \pi^+ \rightarrow \Delta^{++}$$

Soluzioni

Es. 1

a) Calcoliamo l'energia nel SCM, tenendo conto che i momenti di e^+ e e^- hanno stessa direzione e verso opposto

$$s = \left(E_{e-} + E_{e+}\right)^2 - \left(\vec{p}_{e-} + \vec{p}_{e+}\right)^2$$

$$s = 2m_e^2 + 2E_{e-}E_{e+} - 2\vec{p}_{e-} \cdot \vec{p}_{e+} \approx 4E_{e-}E_{e+} = 111.96 \text{ GeV/c}^2$$

La massa della particella è M = sqrt(s) = 10.58 GeV/c^2
La particelle Y creata nella collisione si muove nel SLAB con la velocità del CM (parallela alla velocità dell' elettrone perché l'impulso dell'e^- > impulso e^+)

$$\beta_{CM} = \frac{\left|\vec{p}_{e-} + \vec{p}_{e+}\right|}{E_{e-} + E_{e+}} = \frac{9 - 3.11}{9 + 3.11} = 0.48637$$

$$\gamma_{CM} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{CM}^2}} = 1.1445$$

L'impulso dell Y è

$$p_Y = m_Y\, c\beta_{CM}\, \gamma_{CM} = 10.58 \times 0.48637 \times 1.1445 = 5.89 \text{ GeV/c}$$

b) La vita media della Y è

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar c}{\Gamma c} = \frac{197\ [\mathrm{MeV\,fm}]}{20.5[\mathrm{MeV/c^2}]\times 3\times 10^8 \times 10^{15}\,\mathrm{fm}} = 3.2\times 10^{-23}s$$

Il tempo di decadimento del è dilatato nel SLAB

$$t = \gamma\tau = 1.1445\times 3.2\times 10^{-23} = 3.66\times 10^{-23}\,\mathrm{s}$$

$$L = \beta ct = 0.48637\times 3\times 10^8 \times 3.66\times 10^{-23} = 5.344\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

c) Calcoliamo momento ed energia dei B nel SCM

$$\left(M_Y, 0\right) = \left(E^*_{B+} + E^*_{B-}, \vec{p}^{\,*}_{B+} + \vec{p}^{\,*}_{B-}\right)$$

$$\left|\vec{p}^{\,*}_{B+}\right| = \left|\vec{p}^{\,*}_{B-}\right| \Rightarrow E^*_{B+} = E^*_{B-} = \frac{M_Y}{2} = 5.29\ \mathrm{GeV/c^2}$$

$$\left|\vec{p}^{\,*}_{B+}\right| = \sqrt{E^*_{B+} - M_B^2} = 0.341\ \ \mathrm{GeV/c}$$

Nel SLAB, calcoliamo il momento dei B applicando le trasformazioni di Lorentz per il quadrimpulso

$$\mathrm{E}_\gamma = \gamma\left(E^*_\gamma + p^*_\gamma \beta\cos\theta^*\right)$$

Nel SLAB, calcoliamo il momento dei B applicando le trasformazioni di Lorentz per il quadrimpulso

$$p_B \cos\theta = \gamma_{CM}\left(p_B^* \cos\theta^* + \beta_{CM} E_B^*\right)$$

$$p_B \sin\theta = p_B^* \sin\theta^*$$

dove gli angoli sono misurati rispetto alla direzione di collisione dei fasci.
L'impulso massimo si ha per θ*=0 quando l'impulso trasverso è nullo. In tal caso dalla seconda equazione segue che anche θ=0. Quindi l'impulso nel LAB è

$$p_B = \gamma_{CM}\left(p_B^* + \beta_{CM} E_B^*\right) = 3.33 \text{ GeV/c}$$

d) Per trovare l'angolo max in LAB consideriamo le trasformazioni di Lorentz

$$p_B \cos\theta = \gamma_{CM}\left(p_B^* \cos\theta^* + \beta_{CM} E_B^*\right)$$

$$p_B \sin\theta = p_B^* \sin\theta^*$$

e dividiamo la seconda equazione per la prima

$$\tan\theta = \frac{p_B^* \sin\theta^*}{\gamma_{CM}\left(p_B^* \cos\theta^* + \beta_{CM} E_B^*\right)} = \frac{\sin\theta^*}{\gamma_{CM}\left(\cos\theta^* + \beta_{CM}\dfrac{E_B^*}{p_B^*}\right)}$$

Calcoliamo la derivata di tan θ rispetto a θ*

$$\frac{d\tan\theta}{d\theta^*} = \frac{\gamma_{CM}\cos^2\theta^* + \gamma_{CM}\sin^2\theta^* + \beta_{CM}\gamma_{CM}\frac{E_B^*}{p_B^*}\cos\theta^*}{\left[\gamma_{CM}\left(\cos\theta^* + \beta_{CM}\frac{E_B^*}{p_B^*}\right)\right]^2}$$

La derivata è >0 per $1 + \beta_{CM}\frac{E_B^*}{p_B^*}\cos\theta^* > 0$

$$\cos\theta^* > -\frac{p_B^*}{\beta_{CM}E_B^*}$$

da cui $\cos\theta^*_{MAX} = -\frac{p_B^*}{\beta_{CM}E_B^*}$

$$\tan\theta_{MAX} = \frac{\sqrt{1-\frac{p_B^{*2}}{\beta_{CM}^2 E_B^{*2}}}}{\gamma_{CM}\left(-\frac{p_B^*}{\beta_{CM}E_B^*} + \beta_{CM}\frac{E_B^*}{p_B^*}\right)} = \frac{1}{\gamma_{CM}\beta_{CM}\frac{E_B^*}{p_B^*}\sqrt{1-\frac{p_B^{*2}}{\beta_{CM}^2 E_B^{*2}}}} = 0.116$$

$$\theta_{MAX} = 6.61°$$

Es. 2)
Il decadimento β- del ^{14}C è

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

Il Q valore della reazione nucleare è dato da

$Q_R = (M_N + M_n - M_C - M_p)$ =0.63 MeV

Mentre $T_{e\ max}$ del decadimento β è dato da

$Q_\beta = M_C - M_N - M_{e-} = T_N + T_e + T_\nu$

$T_{e\ max} = M_C - M_N - M_{e-} = -Q_R + M_n - M_p - M_e$

$T_{e\ max} = -0.630 + 939.56 - 938.27 - 0.511 = 0.15$ MeV

^{14}N 7 neutroni e 7 protoni
1 neutrone spaiato configurazione $(p1/2)^1$
1 protone spaiato configurazione $(p1/2)^1$
due particelle con J=1/2 e L=1, possibili valori di J=0,1
la parità totale è il prodotto delle parità che sono uguali a $(-1)^1$ → P=-1 x(-1)=+1
Gli stati per il nucleo N sono quindi $J^P=0^+, 1^+$

Per il ^{14}C nessun nucleone spaiato: $J^P=0^+$

Transizioni possibili a priori

$0^+ \to 0^+$ Transizione di Fermi: se i due leptoni hanno **J_lep**=0 → **J_tot** è conservato altrimenti no

$0^+ \to 1^+$ Transizione di Gamow: se i due leptoni hanno **J_lep**=1
J_tot = **J_nucleo+J_lep =** 0,1,2
La transizione avviene solo se **J_tot** =0

$$\mu_{Nucleo} = \frac{\mu_N}{\hbar} g_{Nucleo}\, j = \frac{\mu_N}{\hbar}\left(g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l+1}\right)\left(l \pm \frac{1}{2}\right)$$

$$g_l = \begin{cases} 0 & n \\ 1 & p \end{cases} \qquad \mathrm{g}_s = \begin{cases} -3.83 & n \\ +5.58 & p \end{cases}$$

$^{14}_{7}N$ p in $1P_{1/2}$ p in $1P_{1/2}$ $\quad \dfrac{\mu_{Nucleo}}{\mu_N} = \left(1 - \dfrac{5.58 - 1}{2\times 1+1}\right)\dfrac{1}{2} + \left(0 - \dfrac{-3.83}{2\times 1+1}\right)\dfrac{1}{2} = -0.246 + 0.633 = +0.392$

$^{14}_{6}C$ $\quad \mu_{Nucleo} = 0$

Es. 3

1 amu = 931.494 MeV/c^2

La massa del nucleo ^{12}C è M = 12xamu

E_k= 500 x 12 è l'energia cinetica totale

$E_k = M(\gamma-1)c^2$

$\gamma = E_k/M + 1 = 500/931.494 + 1 = 1.5367$

da cui si ricava $\beta = 0.7592$

L'effetto Cerenkov si ha per $\cos\theta_C = \frac{1}{\beta n} < 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\beta} = 1.31$

Se n = 1.31 e β=1 l'angolo Cerenkov è $\cos\theta_C = \frac{1}{n} \Rightarrow \theta_C = \arccos\frac{1}{n} = 40.2°$

Es. 4

$$p + \overline{p} \to \gamma$$

Conserva numero barionico, carica momento angolare
Non conserva quadrimpulso; nel SCM fotone avrebbe momento =0

$$\rho^0 \to \gamma + \gamma$$

Non conserva C-parità. C-parità -1 per ρ^0, -1 per fotoni, quindi nello stato finale +1

$$n + n \to \Sigma^0 + K^0$$

Conserva stranezza. Non conserva isospin, numero barionico

$$\pi^+ + p \to K^+ + \overline{K}^0 + p$$

Conserva numero barionico, carica, stranezza (K^+ S=+1 K^0-bar S=-1), isospin, momento angolare

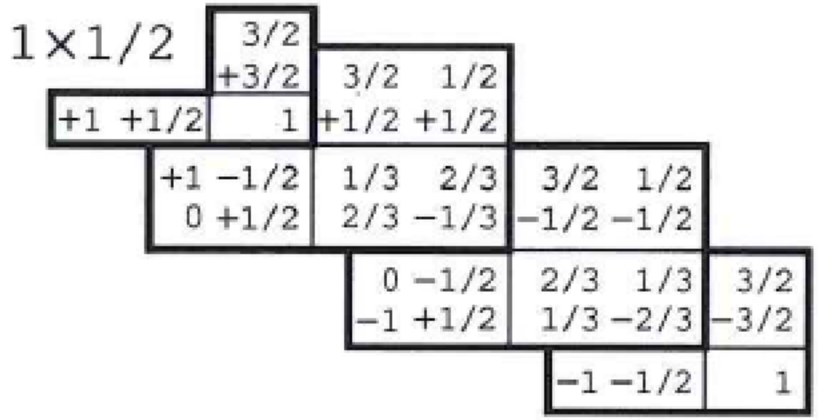
$$|\pi^+ p\rangle = |1,+1\rangle |1/2,+1/2\rangle$$

$$|\pi^- p\rangle = |1,-1\rangle |1/2,+1/2\rangle$$

Usando i coefficienti si possono esprimere i due stati π-N come combinazione della base degli stati di isospin totale

$$|\pi^+ p\rangle = |3/2,+3/2\rangle$$

$$|\pi^- p\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|3/2,-1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,-1/2\rangle$$



Le risonanze sono stati di isospin

$$|\Delta^{++}\rangle = |3/2,+3/2\rangle$$

$$|\Delta^{0}\rangle = |3/2,-1/2\rangle$$

Consideriamo l'hamiltoniana H_S dell'interazione forte nelle 2 reazioni considerate.

La conservazione dell'isospin nell'interazione forte, implica la invarianza di H_S per rotazioni nello spazio dell'isospin.

Quindi gli autostati di isospin totali sono anche autostati di H_S, per cui possono avvenire solo transizioni fra stati con gli stessi valori di I e I_3.

La sezione d'urto dei processi considerati si calcolano quindi così

$$\sigma_{\pi^+ p\to\Delta^{++}} = k\left|\left\langle \pi^+ p\right| H_S \left|\Delta^{++}\right\rangle\right|^2 = k\left|\left\langle 3/2,+3/2\right| H_S \left|3/2,+3/2\right\rangle\right|^2 = k\left|M_{3/2}\right|^2$$

$$\sigma_{\pi^- + p\to\Delta^{0}} = k\left|\left\langle \pi^- p\right| H_S \left|\Delta^{0}\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle 3/2,-1/2\right| H_S \left|3/2,-1/2\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle 1/2,-1/2\right| H_S \left|3/2,-1/2\right\rangle\right|^2 = \frac{k}{3}\left|M_{3/2}\right|^2$$

dove la costante di proporzionalità k è data dal prodotto degli stati accessibili nello spazio delle fasi e dal flusso, che è uguale per tutte le reazioni.

Inoltre l'ampiezza di transizione M dipende solo dal valore di I, e non da I_3

Il rapporto fra le sezioni d'urto è

$$\frac{\sigma_{\pi^+ p\to\Delta^{++}}}{\sigma_{\pi^- + p\to\Delta^{0}}} = 3$$