Fisica Nucleare e subnucleare
Prova in itinere del 26/4/2017

1) Un pione neutro di impulso 3 GeV/c decade in due fotoni. La vita media del π^0 è 8.4×10^{-17} s e la sua massa 135 MeV/c^2.

a) Calcolare l'energia dei fotoni nel sistema del centro di massa (SCM) e descrivere come sono emessi.

b) Calcolare il tempo di decadimento del π^0 nel sistema del laboratorio (SLAB) e lo spazio percorso prima di decadere.

c) Scrivere l'espressione dell'angolo di apertura α dei fotoni nel SLAB in funzione dell'energia di uno dei due fotoni.

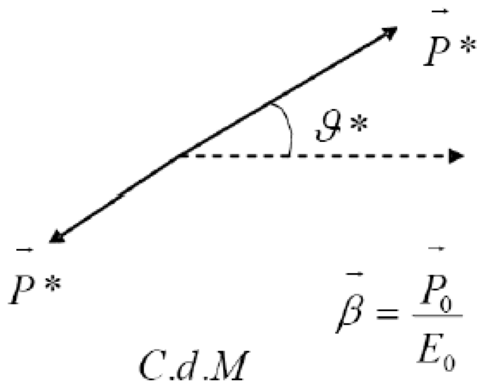
d) Calcolare l'energia dei fotoni per cui α è minimo, e il valore di α_{Min}.

e) La probabilità di emissione P dei fotoni nel SCM è isotropa, cioè $dP/d\Omega^*$ è costante. Dalla condizione di normalizzazione trovare il valore della costante. Ricavare quindi l'espressione di $dP/d\theta^*$ (θ^* è l'angolo polare di emissione del fotone rispetto alla direzione dell'impulso del π^0), sapendo che l'emissione è simmetrica rispetto all'angolo azimutale ϕ^*.

f) Dall'espressione trovata di $dP/d\theta^*$, ricavare la distribuzione di energia del fotone dP/dE_γ in SLAB e dimostrare che è costante. (Suggerimento: differenziare l'equazione della trasformazione di Lorentz dell'energia di un fotone dal SCM a SLAB).

SOLUZIONE

a) Conservazione quadrimpulso nel SCM



$$m_\pi = E^*_{\gamma 1} + E^*_{\gamma 2}$$

$$\vec{p}^*_{\gamma 1} + \vec{p}^*_{\gamma 2} = 0 \Rightarrow \left|\vec{p}^*_{\gamma 1}\right| = \left|\vec{p}^*_{\gamma 2}\right|$$

I fotoni hanno uguale impulso e sono emessi back-to-back
Inoltre poiché i fotoni hanno massa nulla

$$\left|\vec{p}^*_{\gamma 2}\right| = \left|\vec{p}^*_{\gamma 1}\right| = E^*_{\gamma 2} = E^*_{\gamma 1} = \frac{m_\pi}{2}$$

b) Il tempo di decadimento del π^0 è dilatato nel SLAB

$$t = \gamma\tau$$

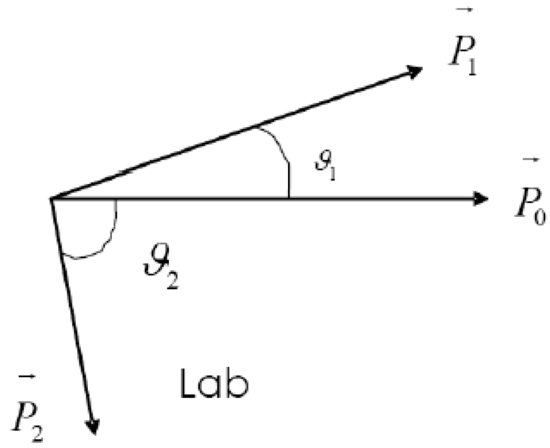
$$\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} = \frac{\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}}{m_\pi} = \frac{\sqrt{3000^2 + 135^2}}{135} = 22.24$$

$$\beta = \frac{p_\pi}{E_\pi} = \frac{3000}{\sqrt{3000^2 + 135^2}} = 0.99899$$

$$t = \gamma\tau = 22.24 \times 8.4 \times 10^{-17} = 1.87 \times 10^{-15}\,\mathrm{s}$$

$$L = vt = 0.99899 \times 3 \times 10^8 \times 1.87 \times 10^{-15} = 5.6 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 560\ \mathrm{nm}$$

c) Conservazione quadrimpulso in SLAB



$$\left(E_\pi, \vec{p}_\pi\right) = \left(E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}, \vec{p}_{\gamma 1} + \vec{p}_{\gamma 2}\right)$$

$$E_\pi^2 - \left|\vec{p}_\pi\right|^2 = \left(E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}\right)^2 - \left(\vec{p}_{\gamma 1} + \vec{p}_{\gamma 2}\right)^2$$

$$m_\pi^2 = 2E_{\gamma 1}E_{\gamma 2} - 2\vec{p}_{\gamma 1} \cdot \vec{p}_{\gamma 2}$$

Poiché i fotoni hanno massa nulla valgono le espressioni

$$\left|\vec{p}_{\gamma 1}\right| = E_{\gamma 1}$$

$$\left|\vec{p}_{\gamma 2}\right| = E_{\gamma 2}$$

che sostituite nell'equazione precedente, danno

$$m_\pi^2 = 2E_{\gamma 1}E_{\gamma 2}(1 - \cos\alpha) = 4E_{\gamma 1}E_{\gamma 2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

dove α è l'angolo di apertura fra I fotoni ($=\theta_1+\theta_2$ nel disegno). Si ricava quindi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m_\pi}{2\sqrt{E_{\gamma 1}E_{\gamma 2}}} = \frac{m_\pi}{2\sqrt{E_{\gamma 1}\left(E_\pi - E_{\gamma 1}\right)}}$$

Avendo utilizzato la conservazione dell'energia in SLAB nell'ultimo passaggio.

d) Per trovare il minimo di α si deve derivare l'espressione

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{m_\pi}{2\sqrt{E_{\gamma 1}\left(E_\pi - E_{\gamma 1}\right)}}$$

rispetto a $E_{\gamma 1}$ e imporre la derivata prima =0

$$\frac{d}{dE_{\gamma 1}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{d}{dE_{\gamma 1}}\left(\frac{m_\pi}{2\sqrt{E_{\gamma 1}\left(E_\pi - E_{\gamma 1}\right)}}\right)=-\frac{m_\pi\left(E_\pi - 2E_{\gamma 1}\right)}{2\left[E_{\gamma 1}\left(E_\pi - E_{\gamma 1}\right)\right]^{3/2}}=0$$

$$\Rightarrow E_{\gamma 1}=E_{\gamma 2}=\frac{E_\pi}{2}$$

Quindi l'angolo di apertura minimo si ha quando l'energia del pione è equipartita fra i due fotoni.
L'angolo minimo vale

$$\sin\frac{\alpha_{MIN}}{2}=\frac{m_\pi}{2\sqrt{\frac{E_\pi}{2}\left(E_\pi - \frac{E_\pi}{2}\right)}}=\frac{m_\pi}{E_\pi}=\frac{m_\pi}{\sqrt{p_\pi^2+m_\pi^2}}=\frac{135}{\sqrt{135^2+3000^2}}=0.045$$

$$\alpha_{MIN}=5.16°$$

e) La probabilità di emissione nel SCM è costante

$$\frac{dP}{d\Omega^*} = c$$

La probabilità totale di emissione su tutto l'angolo solido è 1, quindi

$$1 = \int \frac{dP}{d\Omega^*} d\Omega^* = \int c\, d\Omega^* = 4\pi c \Rightarrow c = \frac{1}{4\pi}$$

da cui

$$\frac{dP}{d\Omega^*} = \frac{1}{4\pi}$$

Scriviamo l'angolo solido in termini di ϕ e θ

$$\frac{dP}{d\Omega^*} = \frac{dP}{d\phi\, d\left(\cos\theta^*\right)} = \frac{1}{4\pi}$$

Dato che l'emissione è simmetrica in ϕ, si può integrare su ϕ tra 0 e 2π ottenendo

$$\frac{dP}{d\left(\cos\theta^*\right)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{d\theta^*} = \frac{\sin\theta^*}{2}$$

f) La trasformazione di Lorentz per l'energia è

$$\mathrm{E}_\gamma = \gamma\left(E_\gamma^* + p_\gamma^* \beta \cos\theta^*\right)$$

dove β e γ del CM coincidono con quelli del π^0 calcolati in b)

$$\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} \qquad \beta = \frac{p_\pi}{E_\pi}$$

Inoltre da a) nel SCM $E_\gamma^* = p_\gamma^* = \dfrac{m_\pi}{2}$

Riscriviamo la trasformazione

$$\mathrm{E}_\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi}\frac{m_\pi}{2}\left(1 + \frac{p_\pi}{E_\pi}\cos\theta^*\right) = \frac{E_\pi}{2}\left(1 + \frac{p_\pi}{E_\pi}\cos\theta^*\right)$$

Differenziamo questa espressione, tenendo conto che le variabili sono Eg e q*, mentre l'energia e l'impulso del pione sono fissati

$$d\mathrm{E}_\gamma = \frac{E_\pi}{2}\frac{p_\pi}{E_\pi} d\left(\cos\theta^*\right) \quad \Rightarrow d\left(\cos\theta^*\right) = \frac{2}{p_\pi} d\mathrm{E}_\gamma$$

Sostituendo l'ultima formula nell'espressione trovata in e) $\dfrac{dP}{d\left(\cos\theta^*\right)} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{dP}{d\left(\cos\theta^{*}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dP}{d\mathrm{E}_{\gamma}} \frac{p_{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{dP}{d\mathrm{E}_{\gamma}} = \frac{1}{p_{\pi}}$$

Quindi la distribuzione di energia del fotone è costante.

2) Un fascio di elettroni di energia 500 MeV/c^2 è diffuso da una targhetta di Al ($Z=13$, $A=27$, $\rho= 2.7$ g/cm^3) di spessore 0.1 mm. Un rivelatore di sezione 1 dm^2 posto ad un metro dalla targhetta conta 200 elettroni al secondo diffusi a $\theta=40°$.

a) Sapendo che la corrente di particelle del fascio è 1 μA, qual è la sezione d'urto differenziale del processo misurata sperimentalmente ?

b) Qual è invece il valore teorico della sezione d'urto Mott del processo? (Assumere che il nucleo non abbia spin).

c) Calcolare l'impulso trasferito q e il corrispondente valore del fattore di forma.

d) Assumendo per semplicità un pattern diffrattivo alla Fraunhofer e sapendo che il valore misurato corrisponde ad un minimo della sezione d'urto differenziale, stimare il raggio dei nuclei di Al.

a) La sezione d'urto sperimentale si ricava dalla formula

$$\Delta \dot{N}_f = \frac{d\sigma}{d\Omega} I_0\, n_b\, \Delta x \frac{A_{riv}}{r^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Delta \dot{N}_f}{I_0\, n_b\, \Delta x \frac{A_{riv}}{r^2}}$$

dove

$$\Delta\Omega = \frac{A_{riv}}{r^2} = \frac{10^{-2}\,\mathrm{m}^2}{1\,\mathrm{m}^2} = 10^{-2}\,\mathrm{sr}$$

$$\Delta \dot{N}_f = 200\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\Delta x = 0.1\,\mathrm{mm} = 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$I_0 = \frac{1\,\mu\mathrm{A}}{1.6 \times 10^{-19}} = 6.25 \times 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$n_b = \rho \frac{N_A}{A} = 2.7 \times 10^3 \frac{6.02 \times 10^{23}}{27 \times 10^{-3}} = 6.02 \times 10^{28}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Delta \dot{N}_f}{I_0\, n_b\, \Delta x \frac{A_{riv}}{r^2}} = \frac{200}{6.25 \times 10^{12} \times 6.02 \times 10^{28} \times 10^{-4} \times 10^{-2}} = 0.05316 \times 10^{-32}\,\mathrm{m}^2\mathrm{sr}^{-1}$$

b) La sezione d'urto Mott è

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Rutherford} = \frac{Z^2\alpha^2\left(\hbar c\right)^2}{4E^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{13^2\left(197\,\mathrm{MeV\,fm}\right)^2}{4\times137^2\times\left(500\,\mathrm{MeV}\right)^2\sin^4\left(\frac{40°}{2}\right)} = 0.0255\ \mathrm{fm^2sr^{-1}} = 0.0255\times10^{-30}\ \mathrm{m^2sr^{-1}}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Rutherford}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0.0255\,\mathrm{fm^2sr^{-1}}\times\cos^2\left(\frac{40°}{2}\right) = 0.0225\,\mathrm{fm^2sr^{-1}}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott}\left|F(q)\right|^2$$

$$\left|F(q)\right|^2 = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott}} = \frac{0.05316\times10^{-32}}{0.0225\times10^{-30}} = 2.36\times10^{-2}$$

$$q = 2p\sin\frac{\theta}{2} = 2\times500\times\sin20° = 342\ \mathrm{MeV/c}$$

b) Nella diffrazione alla Fraunhofer vale

$$\sin\theta = 0.61\frac{\lambda}{R}$$

$$\lambda = \frac{h}{q}$$

$$\sin\theta = 0.61\frac{h}{qR}$$

$$R = 0.61\frac{2\pi\hbar}{q\sin\theta} = 0.61\frac{2\pi\hbar c}{qc\sin\theta} = 0.61\frac{6.28\times 197\,\mathrm{MeV\ fm}}{342\times\sin 40^\circ} = 3.43\ \mathrm{fm}$$